الوحدة الاولي

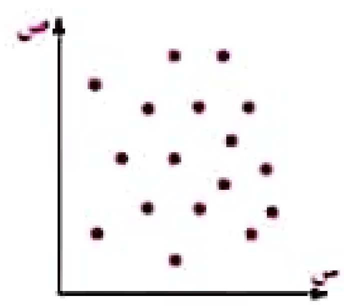
الارتباط والانحدار

اولا الارتباط :

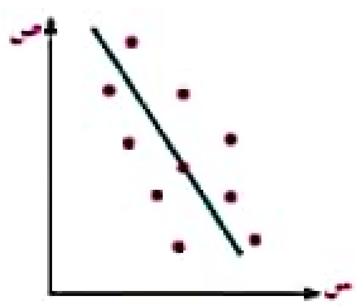
تعريف الارتباط هو علاقة بين متغيرين ،أو أكثر ،ويقاس الارتباط بمعامل الارتباط " ر"

حيث ٠ ≤ ر ≤ ١

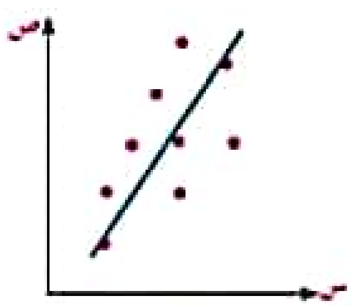
شكل الانتشار هو تمثيل بياني لعدد من الازواج المرتبة (س ، ص) لوصف العلاقة بين متغيرين



شكل (١)
لا يوجد ارتباط



شكل (٢)
يوجد ارتباط خطي عكسي



شكل (٣)
يوجد ارتباط خطي طردي

نوع الارتباط :

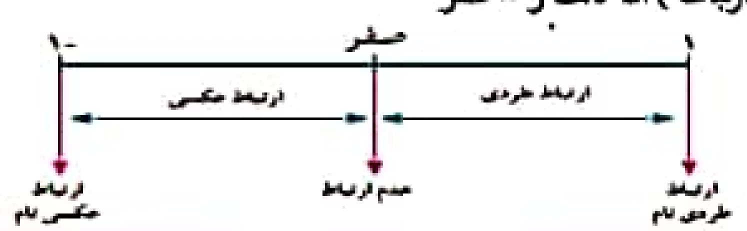
١) طردي تام اذا كان " ر" = ١ ******** عكسي تام اذا كان " ر" = - ١

٢) طردي قوي ٠,٦ < ر < ١ ******** عكسي قوي -٠,٦ > ر > -١

٣) طردي متوسط ٠,٤ ≤ ر ≤ ٠,٦ ******** عكسي متوسط -٠,٤ ≥ ر ≥ -٠,٦

٤) طردي ضعيف ٠ < ر < ٠,٤ ******** عكسي ضعيف ٠ > ر > -٠,٤

٥) منعدم (اي لا يوجد ارتباط) اذا كانت ر = صفر



Scanned by CamScanner

الارتباط الخطي هو الدرجة أو القيمة العددية للعلاقة بين متغيرين فقط

معامل الارتباط ل سبيرمان

$$\text{ر} = ١ - \frac{٦ \sum \text{ف}^{٢}}{\text{ن}(\text{ن}^{٢} - ١)}$$

يسمي احيانا معامل ارتباط الرتب

معامل الارتباط ل بيرسون

$$\text{ر} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\sqrt{\text{ن} \sum \text{س}^{٢} - (\sum \text{س})^{٢}} \sqrt{\text{ن} \sum \text{ص}^{٢} - (\sum \text{ص})^{٢}}}$$

ملاحظة : " ن " هي عدد القيم &&&& ف = رتب س – رتب ص &&& مج هي $\sum$

أمثلة محلولة

مثال (١) احسب معامل ارتباط الرتب وحدد نوع الارتباط من الجدول التالي :

س	١٢٠	١٣٠	١٥٠	١٦٠	١٤٠	١٣٠
ص	٥٠	٤٠	٦٠	٦٠	٦٠	٥٠

الحل

اولا : نقوم بترتيب س وص تنازليا فنجد ان ١٣٠ تكررت مرتين في س وعند الترتيب يكون ترتيبها هو ٤ ، ٥ عندئذ نجمعهم ونقسم الناتج علي عدد التكرارات يصبح ٤,٥ وهكذا في ص

ثانيا : نكون الجدول

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف²
١٢٠	٥٠	٦	٤,٥	١,٥	٢,٢٥
١٣٠	٤٠	٤,٥	٦	١,٥-	٢,٢٥
١٥٠	٦٠	٢	٢	٠	٠
١٦٠	٦٠	١	٢	١-	١
١٤٠	٦٠	٣	٢	١	١
١٣٠	٥٠	٤,٥	٤,٥	٠	٠
					مج ف² = ٦,٥

ثالثا : التعويض ف القانون التالي $\text{ر} = ١ - \frac{٦ \sum \text{ف}^{٢}}{\text{ن}(\text{ن}^{٢} - ١)}$

$$\text{ر} = ١ - \frac{٦ \times ٦,٥}{٦ (٣٦ - ١)} = ٠,٨١$$

الارتباط طردي قوي

Scanned by CamScanner

مثال (٣)

الجدول المقابل يوضح العلاقة بين الكمية المعروضة ص والسعر س . اوجد معامل ارتباط بيرسون وحدد نوعه

السعر س	٩	٦	٣	٧	١	٤
الكمية المعروضه ص	١	٣	٤	٢	٦	٤

الحل

اولاً : نكون الجدول

س	ص	س٢	ص٢	س ص
٩	١	٨١	١	٩
٦	٣	٣٦	٩	١٨
٣	٤	٩	١٦	١٢
٧	٢	٤٩	٤	١٤
١	٦	١	٣٦	٦
٤	٤	١٦	١٦	١٦
مج س = ٣٠	مج ص = ٢٠	مج س٢ = ١٩٢	مج ص٢ = ٨٢	مج س ص = ٧٥

ثانياً : نعوض في القانون التالي

$$\text{ر} = \frac{\text{ن} \sum \text{س ص} - \sum \text{س} \times \sum \text{ص}}{\sqrt{\text{ن} \sum \text{س}^2 - (\sum \text{س})^2}\ \sqrt{\text{ن} \sum \text{ص}^2 - (\sum \text{ص})^2}}$$

ر = – ٠,٩٨٥ ارتباط عكسي قوى

تمارين

(١) الجدول التالي يوضح درجات ست طلاب في امتحاني الكيمياء والاحصاء .

الكيمياء	مقبول	جيد	جيد جدا	مقبول	ضعيف	ممتاز
الاحصاء	جيد جدا	ضعيف	مقبول	جيد	ممتاز	مقبول

اوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان وحدد نوعه

(٢) اوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س و ص وحدد نوع الارتباط في الجدول التالي

س	٦	١٠	٤	٢	١	١	٧
ص	٤	٢	٦	٨	١٠	٩	١١

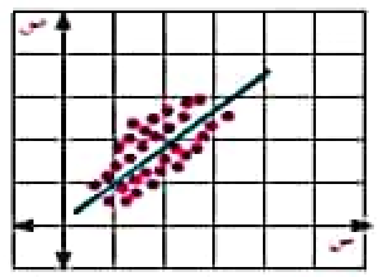
Scanned by CamScanner

ثانيا الانحدار:

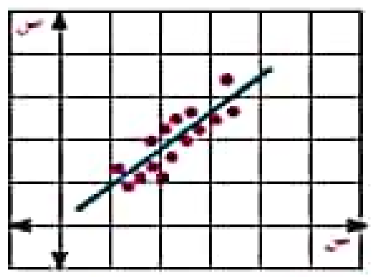
تعريف الانحدار أسلوب إحصائي يمكن بواسطتها تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الاخر

الانحدار الخطي البسيط يعتمد فيه المتغير التابع (ص) على متغير واحد (س) من خلال علاقة خطية او العكس

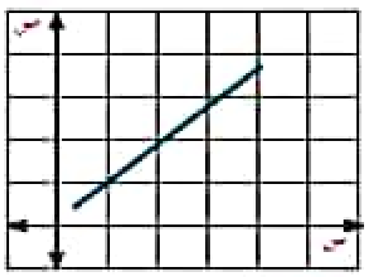
والأشكال التالية توضح العلاقة بين قيمة معامل الارتباط واختلاف وضع النقاط على خط الانحدار



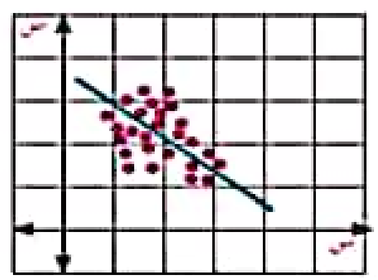
(١) ارتباط طردى متوسط



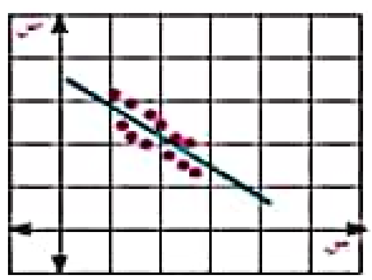
(٢) ارتباط طردى قوى



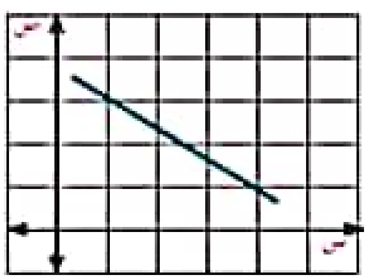
(٣) ارتباط طردى تام



(٤) ارتباط عكسى متوسط



(٥) ارتباط عكسى قوى



(٦) ارتباط عكسى تام

معادلة خط الانحدار

ص على س (اي تقدير ص بمعلومية س)

ص = آ + به س

س على ص (اي تقدير س بمعلومية ص)

س = آ + به ص

ملحوظة : الاكثر انتشارا هو ص علي س

Scanned by CamScanner

حيث ، في حالة معادلة الانحدار ص على س فإن :

$$ب = \frac{ن \sum س ص - (\sum س)(\sum ص)}{ن \sum س^{٢} - (\sum س)^{٢}} \quad .... \quad ا = \frac{\sum ص - ب \sum س}{ن}$$

متى تستخدم معادلة خط الانحدار ؟؟؟

١) التنبؤ بقيمة ص إذا علمت قيمة س او العكس

٢) تحديد مقدار الخطأ الذي يتحدد من العلاقة التالية :

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية – القيمة التي تحقق معادلة الانحدار |

امثلة محلولة

مثال (١) يبين الجدول التالي بيانات عن متوسط سعر برميل البترول (س) ومعدلات النمو الاقتصادي (ص) في إحدى الدول خلال ثماني سنوات

س	٦	٥	٧	٨	١٠	٤	٣
ص	٤	٧	٥	٦	٨	٣	٢

أوجد : ١) معادلة خط الانحدار

٢) قيمة ص اذا كانت س = ٩

٣) مقدار الخطا في ص اذا كانت س = ٨

اولا : نرسم الجدول لكي نوجد مجاهيل القانون

	س	ص	س ص	$س^{٢}$
	٦	٤	٢٤	٣٦
	٥	٧	٣٥	٢٥
	٧	٥	٣٥	٤٩
	٨	٦	٤٨	٦٤
	١٠	٨	٨٠	١٠٠
	٤	٣	١٢	١٦
	٣	٢	٦	٩
المجموع	٤٣	٣٥	٢٤٠	٢٩٩

ثانيا : نعوض ف القانون التالي لايجاد قيمة (ب) :

$$ب = \frac{ن \sum س ص - (\sum س)(\sum ص)}{ن \sum س^{٢} - (\sum س)^{٢}}$$

$$ب = \frac{٧ \times ٢٤٠ - ٤٣ \times ٣٥}{٧ \times ٢٩٩ - (٤٣)^{٢}} = ,٧٢$$

Scanned by CamScanner

وهكذا في (أ) :

$$\text{أ} = \frac{\sum \text{ص} - \text{ب} \sum \text{س}}{\text{ن}} \longrightarrow \text{أ} = \frac{٣٥ - (٠,٧٢ \times ٤٢)}{٧} = ٠,٥٩$$

ثالثا : بالتعويض في معادلة خط الانحدار ص = أ + ب س تصبح :

ص = ٠,٥٩ + ٠,٧٢ س

رابعا :لايجاد قيمة ص اذا كانت س = ٩

ص =٠,٥٩ + (٠,٧٢ × ٩) = ٧,٠٧

خامسا : لايجاد مقدار الخطا في ص اذا كانت س = ٨

١) نحدد القيمة الجدولية (اي اللي في الجدول) فنجد انه عندما س = ٨ فان ص = ٦

٢) نحدد قيمة ص من معادلة الانحدار بالتعويض عن س = ٨ تصبح ص = ٠,٥٩ + (٠,٧٢ × ٨) = ٦,٣٥

٣) نعوض ف القانون : مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية – القيمة التى تحقق معادلة الانحدار | = | ٦ – ٦,٣٥ | = ٠,٣٥

تمارين

١ الجدول التالى يبن الدخل (س) بعشرات الجنيهات والاستهلاك (ص) بعشرات الجنيهات لمجموعة من ٨ عائلات والمطلوب ايجاد معادلة خط انحدار الاستهلاك على الدخل . واحسب أيضا استهلاك أسرة دخلها ٨٠ جنيهاً مع تقدير الخطأ

س	٦٠	٤٨	٨٠	٦٢	٥٢	٧٢	٤٠	٦٤
ص	٤٢	٣٠	٥٠	٤٤	٣٢	٥٠	٣٢	٤٠

٢ اذا كان مج س = ٤٠ ، مج ص = ٣٠ ، مج س ص = ٢٣٢ ، مج $\text{س}^{٢}$ = ٣٦٠ ، مج $\text{ص}^{٢}$ = ٢٠٠ ، ن = ٨

أوجد معادلة خط الانحدار

Scanned by CamScanner

تمارين عامة

مثال (١) في الجدول التالي

س	١٠	١٨	٢٤	٣٠	٣٢	٣٥	٢٠
ص	٢٠	١٥	١٢	١٠	١١	٩	١٥

أوجد : ١) معادلة خط الانحدار

٢) تنبأ بقيمة ص اذا كانت س = ٢٥

٣) احسب مقدار الخطا في ص اذا كانت س = ٢٠

مثال (٢) من بيانات الجدول الآتي

س	ممتاز	جيد	جيد جدا	ضعيف	مقبول	جيد
ص	جيد	ضعيف	مقبول	ممتاز	جيد جدا	مقبول

أوجد : معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س ، ص

اختار الاجابة الصحيحة

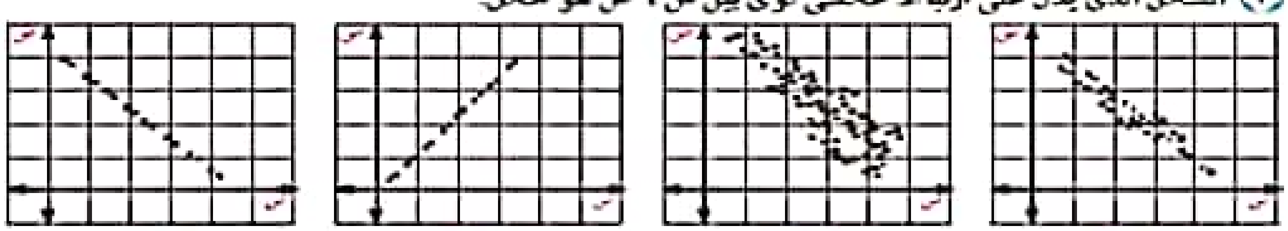
(١) أقوى معامل ارتباط عكسي فيما يلي هو:

أ) -٠,٩ ب) -٠,٥ جـ) -٠,١ د) صفر

(٢) أقل معامل ارتباط فيما يلي هو:

أ) -١,١ ب) -٠,٩ جـ) -٠,١٢ د) ١,٠٢

(٣) الشكل الذي يدل على ارتباط عكسي قوي بين س ، ص هو شكل:



أ ب جـ د

(٤) إذا كانت معادلة خط الانحدار هي : صَ = ٢ - س فإن نوع الارتباط بين المتغيرين س ، ص يكون:

أ) طرديًا تامًا ب) لا يوجد ارتباط جـ) منعدمًا د) عكسيًا تامًا

(٥) إذا كانت معادلة خط الانحدار هي : صَ = ٧ - ٠,٨ س فإن قيمة ص المتوقعة عندما س = ٥ هي :

أ) ٢ ب) ٣ جـ) ٥ د) ٧

(٦) إذا وقعت النقطتان (٢ ، ٨) ، (٧ ، ٣) على خط انحدار س على ص وكان الارتباط تامًا ، فإن معامل الارتباط الخطي يساوي :

أ) -١ ب) صفر جـ) $\frac{1}{2}$ د) ١

Scanned by CamScanner

الباب الثانى

الاحتمال الشرطي

Scanned by CamScanner

الوحدة الثانية

الاحتمال الشرطي

ملحوظة هامة :

$$\text{احتمال وقوع اي حدث} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$$

- **الاحداث المتنافية :** هي الأحداث التى لا يمكن وقوعها فى آن واحد (اي في نفس الوقت)
- **الحدثان المتنافيان :** هما الحدثان اللذان لايشتركان فى أى عنصر ويكون تقاطعهما (المجموعة الخالية) $\emptyset$

$$\boxed{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{صفر} \qquad \text{لان } \text{أ} \cap \text{ب} = \emptyset}$$

- **الحدثان غير المتنافيان :** هما الحدثان الذى توجد بينها عناصر مشتركة اى تقاطعهما $\neq \emptyset$ ..... ويكون :

١) $\boxed{\text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}$ .... يستخدم اذا وجدت :

وقوع (أ) او (ب) كليهما ، وقوع احد الحدثين علي الاقل ، وقوع اي من الحدثين

٢) $\boxed{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) + \text{ل}(\text{ب}) - \text{ل}(\text{أ} \cup \text{ب})}$ .... يستخدم اذا وجدت :

وقوع (أ) و (ب) معا ، وقوع الحدثين معا

٣) $\boxed{\text{ل}(\text{أ})' = 1 - \text{ل}(\text{أ})}$ .... يستخدم اذا وجدت :

حدث عدم وقوع (أ) يعني المكملة

٤) $\boxed{\text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب}') = \text{ل}(\text{أ} - \text{ب}) = \text{ل}(\text{أ}) - \text{ل}(\text{أ} \cap \text{ب})}$ .... يستخدم اذا وجدت :

وقوع (أ) و عدم وقوع (ب) ، وقوع (أ) فقط

Scanned by CamScanner

٥) ل (أ′ ∩ ب) = ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) .... يستخدم اذا وجدت :

وقوع (ب) و عدم وقوع (أ) ، وقوع (ب) فقط

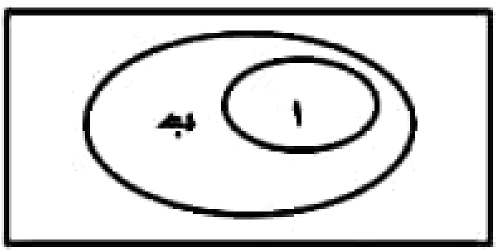
٦) ل (أ′ ∩ ب′) = ل (أ ∪ ب)′ = ١ − ل (أ ∪ ب) .... يستخدم اذا وجدت :

عدم وقوع اي من الحدثين ، عدم وقوع (أ) و عدم وقوع (ب) ، عدم وقوع أحدهما على الأقل

٧) ل (أ′ ∪ ب′) = ل (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب) .... يستخدم اذا وجدت :

عدم حدوث (أ) و (ب) معا ، احتمال حدوث حدث واحد على الأكثر

■ ملاحظات :



■ اذا كانت أ ⊂ ب فأن : ١) ل (أ ∩ ب) = ل (أ)

٢) ل (أ ∪ ب) = ل (ب)

■ قيمة اي احتمال تنحصر بين [٠ ، ١] حيث :

١) احتمال الحدث المؤكد = ١ ٢) احتمال الحدث المستحيل = صفر

الاحتمال الشرطي

يقصد به احتمال وقوع الحدث (أ) بشرط وقوع الحدث (ب) او العكس ، ويرمز له في حالة احتمال وقوع الحدث (أ) بشرط وقوع الحدث (ب) ⟵ ل (أ | ب) ....ويتضح ذلك من القانون الاتي :

ل (أ | ب) = $\dfrac{\text{ل} (\text{أ} \cap \text{ب})}{\text{ل} (\text{ب})}$ حيث ل (ب) > صفر

Scanned by CamScanner

خواص الاحتمال الشرطي

١) صفر $\leq$ ل (أ | ب) $\leq$ ١ ٢) ل (أ | ب) $\neq$ ل (ب | أ)

٣) ل (أ$'$ | ب) = ١ - ل (أ | ب)

٤) ل (أ $\cap$ ب) = ل (أ | ب) × ل (ب) .... من القانون

٥) ل (ف | ب) = ١ .... حيث (ف) تعني فضاء العينة

امثلة محلولة

مثال (١) : إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة عشوائية بحيث كان ل(أ) = ٠,٧ ، ل(ب) = ٠,٦

ل(أ $\cap$ ب) = ٠,٤ فأوجد :

١) ل (أ $\cup$ ب) ٢) ل (أ$'$) ٣) ل (أ$'$ $\cap$ ب$'$)

٤) ل (أ | ب) ٥) ل (ب | أ)

الحل

١) ل (أ $\cup$ ب) = ل(أ) + ل(ب) – ل (أ $\cap$ ب) = ٠,٧ + ٠,٦ – ٠,٤ = ٠,٩

٢) ل (أ$'$) = ١ – ل (أ) = ١ - ٠,٧ = ٠,٣

٣) ل (أ$'$ $\cap$ ب$'$) = ١ – ل (أ $\cup$ ب) = ١ – ٠,٩ = ٠,١

٤) ل (أ | ب) = $\frac{\text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب})}{\text{ل}(\text{ب})} = \frac{٠,٤}{٠,٦} =$ ٠,٦٧

٥) ل (ب | أ) = $\frac{\text{ل}(\text{أ}\cap\text{ب})}{\text{ل}(\text{أ})} = \frac{٠,٤}{٠,٧} =$ ٠,٥٧١

Scanned by CamScanner

مثال (٢) : ألقي حجر نرد منتظم مرة واحدة، احسب احتمال ظهور العدد ٢ علمًا بأن :

١) العدد الظاهر زوجي ٢) العدد الظاهر فردي

الحل

أولاً : العدد الظاهر زوجي **ثانياً : العدد الظاهر فردي**

بفرض أن: فضاء العينة ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } ، أ = { ٢ } فأن :

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد مرات ظهور العدد ٢}}{\text{فضاء العينة}} = \frac{١}{٦}$$

أولاً :

ب = { ٢ ، ٤ ، ٦ } فأن :

$$ل(ب) = \frac{\text{عدد الاعداد الزوجية}}{\text{فضاء العينة}} = \frac{٣}{٦}$$

ثانياً :

ب = { ١ ، ٣ ، ٥ } فأن :

$$ل(ب) = \frac{\text{عدد الاعداد الفردية}}{\text{فضاء العينة}} = \frac{٣}{٦}$$

$$ل(أ \cap ب) = ل(أ) = \frac{١}{٦} \qquad ل(أ|ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$$

أولاً :

$$ل(أ|ب) = \frac{١}{٦} \div \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٣}$$

ثانياً :

$$ل(أ|ب) = \frac{١}{٦} \div \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٣}$$

مثال (٣) : حقيبة بها ١٠ كرات بيضاء ، ١٥ كرة حمراء سُحب عشوائياً كرتان على التوالى دون إحلال (ارجاع الكرة المسحوبة) ما احتمال أن تكون الكرتان لونها ابيض ؟

الحل

أولاً : افرض (أ) هو حدث أن تكون الكرة المسحوبة الاولي بيضاء ، افرض (ب) هو حدث ان تكون الكرة المسحوبة الثانية بيضاء فيصبح المطلوب هو ايجاد ← $\boxed{ل(أ \cap ب)}$

Scanned by CamScanner

ثانيا : ∵ ل (ب | أ) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$ ، ∵ ل (أ ∩ ب) هو احتمال ان تكون الكرة الاولي بيضاء والثانية بيضاء ايضا

ثالثا : احتمال ان تكون الكرة الاولي بيضاء = $\frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{فضاء العينة}}$ = $\frac{١٠}{٢٥}$

رابعا : لايجاد احتمال ان تكون الكرة الثانية بيضاء ايضا لابد من معرفة انه تم اخذ كرة بيضاء في اول مرة دون ارجاع فالبتالي تقص عدد الكرات البيضاء الي ٩ كرات وايضا تقص فضاء العينة الي ٢٤ كرة فيصبح احتمال ان تكون الكرة الثانية بيضاء = $\frac{٩}{٢٤}$

خامسا : مما سبق ينتج ان ل (أ | ب) = $\frac{٩}{٢٤}$ ، وايضا ل(أ) = $\frac{١٠}{٢٥}$

∴ من ثانيا فأن : $\boxed{ل (أ \cap ب) = ل (أ | ب) \times ل(أ)}$

∴ ل (أ ∩ ب) = $\frac{٩}{٢٤} \times \frac{١٠}{٢٥} = \frac{٣}{٢٠}$ وهو المطلوب

تمارين

① حقيبة بها ٥ كرات زرقاء ، ١٠ كرة حمراء سُحب عشوائياً كرتان على التوالى دون إحلال (ارجاع الكرة المسحوبة) فاوجد احتمال :

١) ان تكون الكرتان لونهما ازرق

٢) الكرة الاولي زرقاء والثانية حمراء

(٢) يدرس ١٠٠ طالب فى أحد المعاهد التعليمية لتدريس اللغات، فإذا كان عدد الدارسين للغة الإنجليزية ٦٠ طالبًا وعدد الدارسين للغة الفرنسية ٥٠ طالبًا وعدد الدارسين للغتين معًا ٣٥ طالبًا. اختير أحد الطلاب من هذا المعهد عشوائيًا ، أوجد احتمال أن يكون الطالب دارسًا:

١) أحد اللغتين على الأقل
٢) اللغة الإنجليزية إذا كان دارسًا اللغة الفرنسية.

---

(٣) اذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف بحيث كان ل (أ) = $\frac{1}{2}$ ، ل (ب) = $\frac{5}{6}$

ل (أ ∩ ب) = $\frac{7}{12}$ فاوجد :

١) ل (أ ∪ ب)
٢) ل (أ' ∩ ب)
٣) ل (أ | ب)
٤) ل (أ | ب')

---

(٤) ألقي حجر نرد مرة واحدة . احسب احتمال أن يكون العدد الظاهر عددًا أوليًا بشرط أن يكون العدد الظاهر عددًا فرديًا .

---

(٥) ألقي حجرا نرد متمايزان مرة واحدة ، أوجد احتمال كل من الأحداث الآتية :

١) ظهور العدد ٢ على الوجهين معا علمًا بأن العدد نفسه ظهر على كل منهما.
٢) ظهور العدد ٥ على الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين كل منهما يزيد عن ٤
٣) عدم ظهور العدد ٣ على أى من الوجهين علمًا بأن العددين الظاهرين فرديان.

Scanned by CamScanner

ثانيا : الأحداث المستقلة

- يقال لحدثين أ ، ب انهما مستقلان إذا وإذا فقط :

ل (أ ∩ ب) = ل (أ) × ل (ب)

- الحدثان المتنافيان يكونان مستقلان اذا كان :

ل (أ) × ل (ب) = صفر

- إذا كان الحدثان أ ، ب انهما مستقلان وكان ل (ب) ≠ صفر فأن :

ل (أ | ب) = ل (أ)

امثلة محلولة

مثال (١) : إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٤

ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ . بين مع ذكر السبب هل أ ، ب حدثان مستقلان ؟

الحل

- لمعرفة اذا كان أ ، ب حدثان مستقلان ام لا يجب ايجاد ل (أ ∩ ب) ، ل (أ) ، ل (ب) ومن المسائلة فأن ل (أ) ، ل (ب) معلومين بينما ل (أ ∩ ب) مجهولة .

∵ ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∪ ب)

∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٥ + ٠,٤ – ٠,٧ = ٠,٢ (١)

∵ ل (أ) × ل (ب) = ٠,٥ × ٠,٤ = ٠,٢ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج ان أ ، ب حدثان مستقلان

Scanned by CamScanner

مثال (٣) : إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف حيث ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

وكان أ = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ } ، ب = { ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } هل أ ، ب حدثان مستقلان ؟

الحل

- كما ذكرنا في المثال السابق يجب ايجاد ل (أ ∩ ب) ، ل (أ) ، ل (ب) لمعرفة وجود استقلال ام لا

اولا : لايجاد ل (أ) = $\frac{\text{عدد عناصر العينة}}{\text{فضاء العينة}} = \frac{٤}{٦}$

ثانيا : لايجاد ل (ب) = $\frac{\text{عدد عناصر العينة}}{\text{فضاء العينة}} = \frac{٤}{٦}$

ثالثا : لايجاد ل (أ ∩ ب) = $\frac{\text{عدد العناصر المشتركة في أ ، ب}}{\text{فضاء العينة}} = \frac{٢}{٦}$ (١)

∵ ل (أ) × ل (ب) = $\frac{٤}{٦} \times \frac{٤}{٦} = \frac{\cancel{١٦}}{\cancel{٣٦}} = \frac{٤}{٩}$ (٢)

∴ من (١) ، (٢) ينتج ان ل (أ ∩ ب) ≠ ل (أ) × ل (ب) وبالتالي أ ، ب حدثان غير مستقلان

تمارين

① إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث ف ={ ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ٧ ، ٨ } وكان

أ = { ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٧ } ، ب= { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٨ } هل أ ، ب حدثان مستقلان ؟

② إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف وكان ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٦

ل (أ ∪ ب) =٠,٨ . بين مع ذكر السبب هل أ ، ب حدثان مستقلان ؟

Scanned by CamScanner

تمارين عامة

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين وكان ل(أ) = ٠,٢ ، ل(ب) = ٠,٦ فإن ل(أ ∪ ب) =

أ ٠,٤ ب ٠,٦ جـ ٠,٨ د ١,٢

(٢) إذا كان أ ⊃ ب وكان ل (أ َ) = $\frac{٧}{١٠}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٤}$ فإن ل (أ | ب) تساوي:

أ $\frac{١}{٥}$ ب $\frac{٢}{٥}$ جـ $\frac{٤}{٥}$ د $\frac{٣}{٢٠}$

(٣) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين وكان ل (أ) = ٠,٢ ، ل (ب) = ٠,٥ فإن ل(أ ∩ ب) =

أ ٠,٧ ب ٠,٤ جـ ٠,٣ د ٠,١

(٤) إذا كانت ف = {أ ، ب ، جـ} وكان أ ، ب ، جـ أحداث متنافية حيث ل (أ) = ٠,٢٥ ، ل(ب) = ٠,٤ فإن ل(جـ) =

أ ٠,١ ب ٠,١٥ جـ ٠,٣٥ د ٠,٦٥

(٥) إذا كان أ ، ب حدثين مستقلين من ف حيث ل(ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦٨ فإن ل (أ) =

أ ٠,٢ ب ٠,٣ جـ ٠,٤ د ٠,٥

(٢) يحتوي كيس على ٢٦ بطاقة منها ١٠ بطاقات حمراء ، ١٦ بطاقة خضراء، سُحبت بطاقتان عشوائيًا الواحدة تلو الأخرى دون إحلال (دون إرجاع) ما احتمال أن تكون :

أ- الكرتان حمراوين

ب- الكرة الأولى حمراء والثانية خضراء

(٣) اذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان:

$$ل (أ - ب) = \frac{١}{٢} ، ل (أ ∪ ب) = \frac{٥}{٨}$$

فأوجد :

١) ل (أ)   ٢) ل (ب)   ٣) ل (أ ∩ ب)

٤) ل (أ َ ∪ ب َ)   ٥) هل أ ، ب حدثان مستقلان ؟

Scanned by CamScanner

الباب الثالث

المتغيرات العشوائيةوالتوزيعات الاحتمالية

Scanned by CamScanner

الوحدة الثالثة

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

■ **المتغيرات العشوائية :** تنقسم المتغيرات العشوائية الي نوعين :

اولا متغير عشوائي متقطع :

له عدة قوانين وهي :

١) (الوسط الحسابي) او (التوقع) ويرمز له بالرمز μ حيث :

$$\mu = \text{مج } س_ر \times د(س_ر)$$

٢) (التباين) ويرمز له بالرمز σ^2 حيث :

$$\sigma^2 = \text{مج } س_ر^2 \times د(س_ر) - \mu^2$$

٣) (الانحراف المعياري) ويرمز له بالرمز σ حيث :

$$\sigma = \sqrt{\text{التباين}}$$

٤) (معامل الاختلاف) $= \frac{\sigma}{\mu} \times 100\ \% = \text{الناتج}\ \%$

امثلة محلولة

مثال (١) : صندوق به ٥ بطاقات متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٥ ، سُحبت منه بطاقتان واحدة بعد الأخرى بدون إحلال (دون إرجاع) ، أوجد دالة التوزيع الاحتمالى لكل من المتغير العشوائي الذى يعبر عن أصغر العددين على البطاقتين المسحوبتين.

Scanned by CamScanner

الحل

- سحب البطاقات يتم بدون إرجاعها إلى الصندوق ، فإن البطاقة التى تسحب لا تتكرر ثانية، بمعنى ان الازواج المرتبة (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) لا تكون في فضاء العينة حيث ان فضاء العينة يساوى ($٥^٢$ = ٢٥) وبما ان الازواج السابقة غير موجودة في الفضاء فأن الفضاء يصبح (٢٥ – عدد الازواج = ٢٥ – ٥ = ٢٠) وبالتالي فان فضاء العينة يصبح ٢٠
- لايجاد مدى المتغير العشوائى ($س_ر$) وهو الذي يعبر عن اصغر العددين على البطاقتين المسحوبتين فمثلا لو ظهر العدد ١ ، ٤ فيكون اصغرهم ١ ...... وايضا اذا ظهر العدد ٢ ، ٥ فيكون اصغرهم ٢ وهكذا .... يصبح المدي {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }
- لايجاد د ($س_ر$) فمثلا عند $س_ر$ = ٢ فأن احتمال البطاقات الظاهرة هو :

{ (~~٢ ، ١~~) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) ، (~~١ ، ٢~~) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ٢) }

وبالتالي يصبح د ($س_ر$) = ل (س = ٢) = $\frac{\text{عدد مرات ان يكون الرقم (٢) الاصغر في الازواج المرتبة}}{\text{فضاء العينة}} = \frac{٦}{٢٠}$ وهكذا

- مما سبق فأن :

ف = ٢٠ ، $س_ر$ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

١) عندما $س_ر$ = ١ فأن د (١) = $\frac{٨}{٢٠}$ ، ٢) عندما $س_ر$ = ٢ فأن د (٢) = $\frac{٦}{٢٠}$

٣) عندما $س_ر$ = ٣ فأن د (٣) = $\frac{٤}{٢٠}$ ، ٤) عندما $س_ر$ = ٤ فأن د (٤) = $\frac{٢}{٢٠}$

- يصبح التوزيع الاحتمالي :

$س_ر$	١	٢	٣	٤
د ($س_ر$)	$\frac{٨}{٢٠}$	$\frac{٦}{٢٠}$	$\frac{٤}{٢٠}$	$\frac{٢}{٢٠}$

Scanned by CamScanner

مثال (٢) : إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متقطعًا توزيعه الاحتمالي مبينًا بالجدول الآتي:

٣	٢	١	٠	-١	س ر
٠,٢	ك	٠,١	٠,١	٠,٣	د(س ر)

اوجد: ١) قيمة ك ٢) التوقع (المتوسط)

الحل

- **أولاً** : كما علمنا في الباب السابق ان مجموع الاحتمالات يساوى الواحد الصحيح . فنقوم بجمع جميع الاحتمالات د(س ر) ونطرحها من الواحد لايجاد قيمة المتغير الموجود في المسائلة

∴ ك = ١ – (٠,٣ + ٠,١ + ٠,١ + ٠,٢) = ١ - ٠,٧ = ٠,٣ (المطلوب الاول)

- **ثانياً** : لايجاد التوقع (المتوسط) يتم اخذ كل عنصر في س ر واضربه في العنصر المقابل في د(س ر)

∴ التوقع (μ) = (-١ × ٠,٣) + (٠ × ٠,١) + (١ × ٠,١) + (٢ × ٠,٣) + (٣ × ٠,٢)

= -٠,٣ + ٠ + ٠,١ + ٠,٦ + ٠,٦ = ١ (المطلوب الثاني)

مثال (٣) : اذا كان س متغير عشوائي متقطع متوسطه = ١,٥ وتوزيعه الاحتمالي كالاتي :

٤	ك	١	-٢	س ر
م	٠,٥	٢ م	م	د(س ر)

أوجد : ١) قيمة كلا من ك ، م ٢) الانحراف المعياري ٣) معامل الاختلاف

الحل

- **أولاً** : لايجاد قيمة م نجمع كل الاحتمالات ونساويها بالواحد ونحلها كمعادلة فتصبح :

م + ٢ م + ٠,٥ + م = ١

٤ م = ٠,٥

∴ م = $\frac{٠,٥}{٤}$ = $\frac{١}{٨}$

Scanned by CamScanner

ولايجاد قيمة ك فانه يتم استخدام التوقع في ايجاده حيث :

$$\text{التوقع} = \left(-٢ \times \frac{١}{٨}\right) + \left(١ \times \frac{٢}{٨}\right) + \left(\text{ك} \times ٠,٥\right) + \left(٤ \times \frac{١}{٨}\right) = ١,٥$$

$$= -\cancel{\frac{٢}{٨}} + \cancel{\frac{٢}{٨}} + ٠,٥\,\text{ك} + \frac{٤}{٨} = ١,٥$$

$$\therefore \text{ك} = \frac{١}{٠,٥} = ٢$$

ثانياً : لايجاد الانحراف المعياري :

لايجاد الانحراف المعياري لابد من ايجاد التوقع ومن ثم التباين ثم ايجاد الجذر التربيعي له . وبما ان التوقع معطي في السؤال فنحصل علي التباين من خلال القانون :

$$\text{التباين } (\sigma^{٢}) = \text{مج } \text{س}^{٢}_{\text{ر}} \times \text{د}(\text{س}_{\text{ر}}) - \mu^{٢}$$

$$\therefore \text{التباين} = \left(٤ \times \frac{١}{٨} + ١ \times \frac{٢}{٨} + ٤ \times \frac{١}{٢} + ١٦ \times \frac{١}{٨}\right) - (١,٥)^{٢} = ٢,٥$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري } (\sigma) = \sqrt{٢,٥} = ١,٥٨$$

ثالثاً : لايجاد معامل الاختلاف :

يتم ايجاد معامل الاختلاف من خلال القانون الاتي :

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\sigma}{\mu} \times ١٠٠ \%$$

$$\therefore \text{معامل الاختلاف} = \frac{١,٥٨}{١,٥} \times ١٠٠ \% = ١٠٥,٣ \%$$

Scanned by CamScanner

ثانيا المتغير العشوائي المتصل :

ملحوظة : اذا كان { ل (أ ≤ س ≤ ب) = ١} فانها تسمى دالة كثافة الاحتمال

امثلة محلولة

مثال (١) : اذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا حيث :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{-(١ - س)}{٨} & \text{حيث : } ١ \leq س \leq ٥ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فيما عدا ذلك

(١) اثبت ان د (س) هي دالة كثافة احتمالية

(٢) احسب ل (٢ < س < ٣)

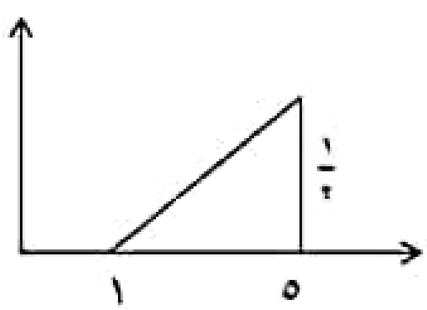
الحل

أولا : لاثبات ان د (س) هي دالة كثافة احتمالية لابد من اثبات ان ل (١ ≤ س ≤ ٥) = ١ ولاثبات ذلك علينا

ايجاد د (١) ، د (٥) وبالتمثيل لها لتحديد المنطقة الواقعة اسفل المنحني ثم ايجاد مساحتها

$$د(١) = \frac{-(١ - ١)}{٨} = \text{صفر}$$

$$د(٥) = \frac{-(١ - ٥)}{٨} = \frac{٤}{٨} = ٠,٥$$



من التمثيل يتضح ان الشكل مثلث ولايجاد مساحته فانها = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

∴ ل (١ ≤ س ≤ ٥) = $\frac{١}{٢}$ × (٥ − ١) × ٠,٥ = ١

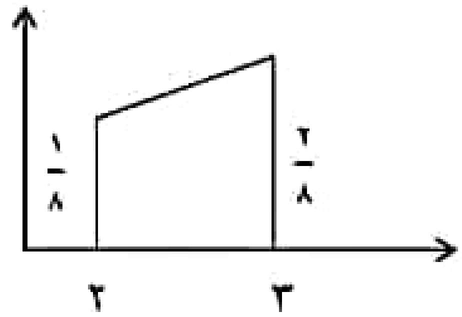
∴ د (س) هي دالة كثافة احتمالية

Scanned by CamScanner

ثانياً : لايجاد ل (٢ < س < ٣) كما سبق نوجد د (٢) ، د (٣) ونكرر الخطوات السابقة .

$$د(٢) = \frac{-(١-٢)}{٨} = \frac{١}{٨}$$

$$د(٣) = \frac{-(١-٣)}{٨} = \frac{٢}{٨}$$



من التمثيل يتضح ان الشكل شبه منحرف ولايجاد مساحته فانها = $\frac{١}{٢}$ × مجموع القاعدتين × الارتفاع

$$\therefore ل(٢ < س < ٣) = \frac{١}{٢} \times \left(\frac{١}{٨} + \frac{٢}{٨}\right) \times (٣ - ٢) = \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٨} \times ١ = \frac{٣}{١٦}$$

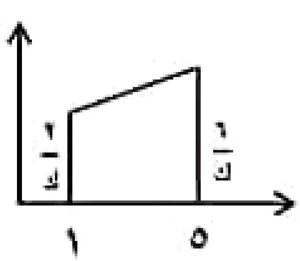
مثال (٣) : أوجد قيمة ك اذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هى :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س + ١}{ك} & \text{حيث : } ل(١ \leq س \leq ٥) \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

الحل

بما ان د(س) دالة كثافة احتمالية فان ل (١ ≤ س ≤ ٥) = ١ وبناء علي ذلك نكرر خطوات المثال السابق .

$$د(١) = \frac{١+١}{ك} = \frac{٢}{ك} \quad ، \quad د(٥) = \frac{١+٥}{ك} = \frac{٦}{ك}$$



من التمثيل يتضح ان الشكل شبه منحرف .

$$\frac{١}{٢} \times \left(\frac{٢}{ك} + \frac{٦}{ك}\right) \times ٤ = ١ \longrightarrow \frac{٨}{ك} \times ٢ = ١ \longrightarrow \therefore ك = ١٦$$

Scanned by CamScanner

تمارين

أولا : اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الآتية :

(١) القيمة المتوقعة للتوزيع الاحتمالي التالي هي :

سر	صفر	١	٢
د(سر)	٠,٢	٠,٣	٠,٥

(أ) ١ (ب) ١,١٤ (جـ) ١,٢ (د) ١,٥

(٢) إذا كان التوقع في التوزيع الاحتمالي التالي :

سر	١	٢	ك
د(سر)	٠,١	٠,٨	٠,١

يساوي ٢ فإن قيمة ك تساوي

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

(٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} ك & \text{حيث } -٤ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن ك =

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) صفر (د) ٤

ثانيا :

(١) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متوسطه μ = ٢ وتوزيعه الاحتمالي كالآتي :

سر	١	٠	٢	أ
د(سر)	$\frac{١}{١٢}$	ب	$\frac{١}{٣}$	$\frac{٥}{١٢}$

أولا : احسب قيمتي أ ، ب **ثانيًا :** احسب الانحراف المعياري

(٢) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا ، دالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س+٢}{١٦} & \text{حيث } ٠ < س < ٤ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : أولا : ل (س < ٢) **ثانيًا :** ل (١ < س < ٤)

(٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي :

$$د(س) = \begin{cases} \frac{س+١}{٨} & \text{حيث } أ < س < أ + ٢ \\ \text{صفر} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد : أولا : قيمة أ **ثانيًا :** ل (س < ٣)

Scanned by CamScanner

الباب الرابع

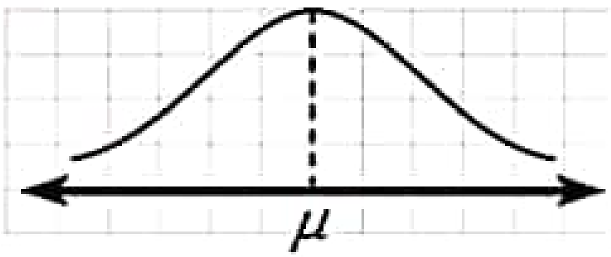
التوزيع الطبيعي

Scanned by CamScanner

الوحدة الرابعة

التوزيع الطبيعي

اولا خواص المنحنى الطبيعي



(١) له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلى - ∞ ، ∞ .

(٢) له محور تماثل يمر بالقمة ويقطع المحور الأفقي عند س = μ

(٣) مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى الطبيعى وفوق محور السينات تساوى الواحد الصحيح

(٤) من التماثل نجد أن المستقيم س= μ يقسم المساحة الواقعة تحت المنحنى وفوق محور السينات

إلى منطقتين مساحة كل منهما = ٠.٥

ثانيا التوزيع الطبيعى المعيارى

إذا كان التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى (س) هو التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وانحراف معيارى σ . فأن :

$$ص = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

ثالثا لايجاد قيمة الاحتمال من جدول المساحات

مثلا لايجاد ل (٠ ≥ ص ≥ ١,١٢) نذهب الي الجدول ونذهب إلى الصف الأفقى الأعلى ونبحث عن الجزء من

مائة وهو (٠,٠٢) الموجود في المثال ثم نذهب العمود الرأسى الأيمن ونبحث عن باقى الرقم وهو (١,١)

و نقطة التقاطع الصف الافقي للقيمة (٠,٠٢) مع العمود الراسي للقيمة (١,١) تكون المساحة المطلوبة

وهي ٠,٣٦٨٦ وبالتالي فان :

ل (٠ ≥ ص ≥ ١,١٢) =٠,٣٦٨٦

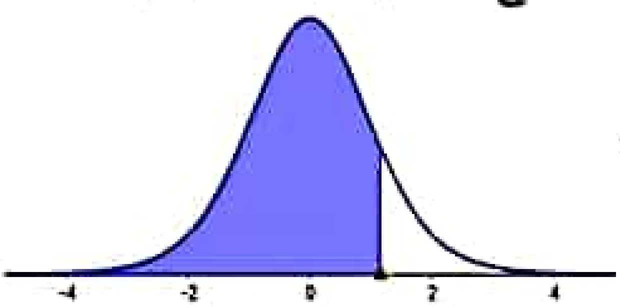
Scanned by CamScanner

امثلة محلولة

مثال (١) : إذا كان ص متغيراً عشوائيا طبيعياً معيارياً فأوجد : ل (ص ≤ ١,١٧)

الحل

شرح لحل المثال : نحن نعلم ان المساحة تحت المنحني = ١ وتنقسم الي جزئين من جهة اليمين و اليسار وكلا منها تساوي ٠,٥ وبالتمثيل البياني للمثال نجد ان ١,١٧ تقع بعد الصفر من جهة اليمين ونريد ايجاد احتمال الاقل من ١,١٧ فناخذ الشكل التالي :



حيث يشير السهم الي ١,١٧ وتشير المنطقة المظللة الي المنطقة المطلوب ايجادها وتنقسم الي جزئين جزء علي يسار الصفر وهذا معلوم قيمته وهي (٠,٥) وجزء علي يمين الصفر وهذا محدد من الصفر ال ١,١٧ ويمكن الحصول عليها من خلال جدول المساحات .

طريقة الحل :

	٠,٠٧
١,١	٠,٣٧٩٠

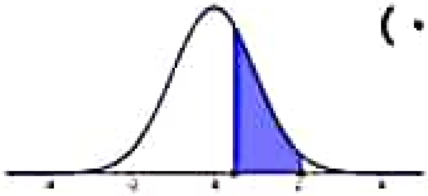
ل(ص ≤ ١,١٧) = ل (٠ ≤ ص ≤ ١,١٧) + ل (ص ≤ ٠)

= ٠,٣٧٩٠ + ٠,٥ = ٠,٨٧٩

مثال (٢) : إذا كان ص متغيراً عشوائيا طبيعياً معيارياً فأوجد : ل (٠,٤٨ ≤ ص ≤ ٢,١)

الحل

ل (٠,٤٨ ≤ ص ≤ ٢,١) = ل (٠ ≤ ص ≤ ٢,١) - ل (٠ ≤ ص ≤ ٠,٤٨)



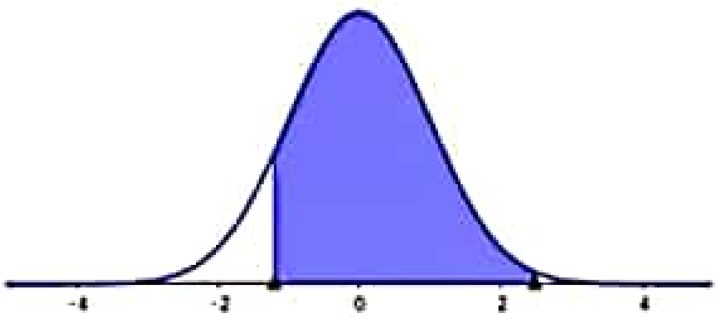
= ٠,٤٨٢١ – ٠,١٨٤٤ = ٠,٢٩٧٧

Scanned by CamScanner

مثال (٣) : اذا كان ص متغيراً عشوائيا طبيعياً معيارياً فأوجد : ل (- ١,٢ ≥ ص ≥ ٢,٤٨)

الحل

ل (- ١,٢ ≥ ص ≥ ٢,٤٨)



= ل (- ١,٢ ≥ ص ≥ ٠) + ل (٠ ≥ ص ≥ ٢,٤٨

= ل (٠ ≥ ص ≥ ١,٢) + ل (٠ ≥ ص ≥ ٢,٤٨

= ٠,٣٨٤٩ + ٠.٤٩٣٤ = ٠.٨٧٨٣

مثال (٤) : اذا كان ص متغير العشوائى طبيعياً فأوجد قيمة ك في : ل (ص ≤ ك) = ٠.١٠٥٦

الحل

<u>ملاحظة</u> : اذا كانت علامة التباين أكبر من (ك) اي المجهول والقيمة أكبر من (٠,٥) فان القيمة سالبة

واذا كانت علامة التباين اقل من (ك) اي المجهول والقيمة اقل من (٠,٥) فان القيمة سالبة

وغير ذلك تكون القيمة موجبة

ففي المثال نجد ان علامة التباين أكبر ولكن القيمة اقل من (٠,٥) فتصبح قيمة (ك) موجبة حيث :

∵ ل (ص ≤ ك) = ٠.١٠٥٦ ∴ ٠,٥ – ل (٠ ≥ ص ≥ ك) = ٠.١٠٥٦

∴ ل (٠ ≥ ص ≥ ك) = ٠,٥ - ٠.١٠٥٦ = ٠,٣٩٤٤

نذهب الي الجدول والي القيمة ٠,٣٩٤٤ وننظر بجانبه واعلاه وتكون هذه قيمة ك

∴ ك = ١,٢٥

	٠,٠٥
١,٢	٠,٣٩٤٤

Scanned by CamScanner

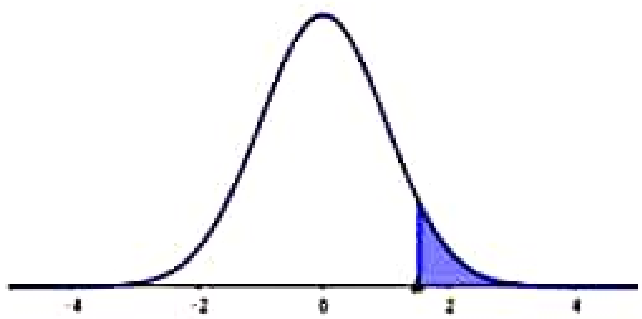
مثال (٥) : اذا كان س متغير عشوائي طبيعيا متوسطه = ١٢ وانحرافه المعياري = ٢ فأوجد : ل (س > ١٥)

الحل

أولا : نستخدم القانون ص = $\frac{(\text{س} - \mu)}{\sigma}$ وذلك عن طريق :

ل (س > ١٥) = ل ($\frac{(\text{س} - \mu)}{\sigma}$ > $\frac{(\text{١٥} - \text{١٢})}{\text{٢}}$)

= ل (ص > ١,٥)



ثانيا : نوجد قيمة ل (ص > ١,٥) كما سبق في الامثلة

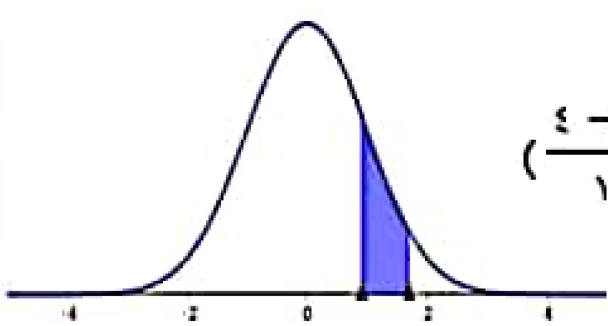
ل (ص > ١,٥) = ٠,٥ - ل (٠ < ص < ١,٥)

= ٠,٥ - ٠.٤٣٣٢ = ٠,٠٦٦٨

مثال (٦) : اذا كان س متغير عشوائي طبيعيا متوسطه = ٤ وانحرافه المعياري = ١٢ فأوجد : ل (١٥< س < ٢٤)

الحل

نستخدم القانون ص = $\frac{(\text{س} - \mu)}{\sigma}$ وذلك عن طريق :



ل (١٥< س < ٢٤) = ل ($\frac{\text{١٥} - \text{٤}}{\text{١٢}}$ < $\frac{(\text{س} - \mu)}{\sigma}$ < $\frac{\text{٢٤} - \text{٤}}{\text{١٢}}$)

= ل (٠,٩٢ < ص < ١,٧)

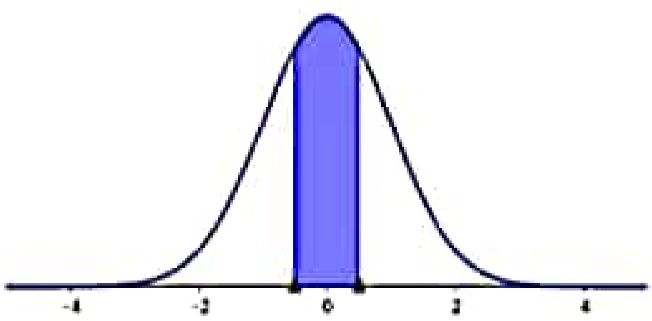
= ل (٠ < ص < ١,٧) – ل (٠ < ص < ٠,٩٢)

= ٠.٤٥٥٤ – ٠,٣٢١٢ = ٠,١٣٤٢

Scanned by CamScanner

مثال (٧) : إذا كان الدخل الشهرى لمجموعة مكونة من ٢٠٠ عامل فى أحد المصانع يتبع التوزيع الطبيعى متوسط ١٧٥ جنيهًا وانحرافه المعيارى ١٠ جنيهات، فما هو عدد العاملين الذين يتراوح دخلهم بين ١٧٠ جنيهًا، ١٨٠ جنيهًا.

الحل



∵ μ = ١٧٥

، σ = ١٠

، عدد عمال المصنع (العدد الكلي) = ٢٠٠

نفرض ان س هو عدد العاملين اللذين يتراوح دخلهم بين ١٧٠ جنيهًا ، ١٨٠ جنيهًا.

∴ ل (١٧٠ < س < ١٨٠) = ل ($\frac{\text{١٧٠} - \text{١٧٥}}{\text{١٠}} < \frac{(\text{س} - \mu)}{\sigma} < \frac{\text{١٨٠} - \text{١٧٥}}{\text{١٠}}$)

= ل (-٠,٥ < ص < ٠,٥)

= ل (-٠,٥ < ص < ٠) + ل (٠ < ص < ٠,٥)

= ل (٠ < ص < ٠,٥) + ل (٠ < ص < ٠,٥)

= ٠.١٩١٥ + ٠.١٩١٥ = ٠,٣٨٣

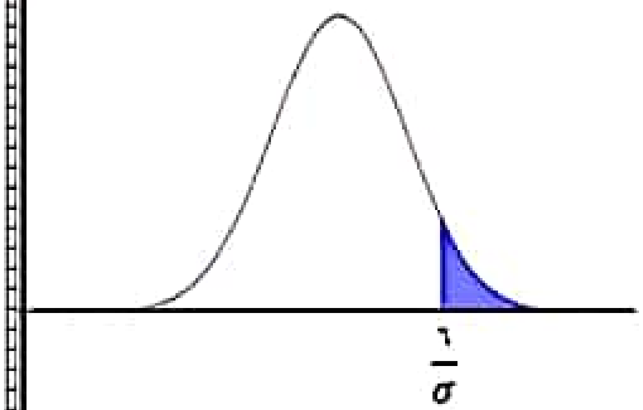
ولايجاد عدد العمال = الاحتمال × العدد الكلي

= ٠,٣٨٣ × ٢٠٠ = ٧٧ عامل

مثال (٨) : إذا كانت درجات الطلاب فى إحدى المدارس هى متغير عشوائى طبيعى متوسطه ٤٤ ، وانحرافه المعيارى σ حيث حصل ٢٢,٦٦ % من الطلاب على أكثر من ٥٠ درجة ، أوجد قيمة σ

Scanned by CamScanner

الحل



∵ المتوسط (μ) = ٤٤ ، الانحراف المعياري (σ) = ؟؟

نفرض أن س هو متغير عشوائي يعبر عن درجات الطلاب

ل (س > ٥٠) = ٢٢٫٦٦ % = $\frac{٢٢٫٦٦}{١٠٠}$ = ٠٫٢٢٦٦

ل (س > ٥٠) = ل ($\frac{(س - \mu)}{\sigma} > \frac{٥٠ - ٤٤}{\sigma}$)

= ل (ص > $\frac{٦}{\sigma}$) = ٠٫٢٢٦٦

= ل (٠ ≤ ص < $\frac{٦}{\sigma}$) = ٠٫٥ − ٠٫٢٢٦٦ = ٠٫٢٧٣٤

	٠٫٠٥
٠٫٧	٠٫٢٧٣٤

∴ $\frac{٦}{\sigma}$ = ٠٫٧٥ ∴ σ = ٨ (وهو المطلوب)

Scanned by CamScanner

تمارين

١) إذا كانت درجات الطلاب فى أحد الامتحانات تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ٦٠ وانحرافه المعيارى ١٢ ، واختير طالب عشوائيًا ، أوجد احتمال أن تكون درجة الطالب واقعة بين ٦٦ ، ٧٥ وإذا كان ١٥ % من الطلاب الأوائل بالترتيب حصلوا على تقدير ممتاز ، فأوجد أقل درجة للطالب الحاصل على تقدير ممتاز

٢) إذا كان توزيع أوزان التلاميذ فى إحدى المدارس الابتدائية يتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ٣٠ كجم وانحراف معيارى ٥ كجم، احسب النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يزيد أوزانهم عن ٤٥ كجم، ٣٥ كجم. ، وكذلك النسبة المئوية لعدد التلاميذ الذين يقع أوزانهم بين ٢٥ ، ٣٥ كجم

٣) إذا كانت أجور مجموعة مكونة من ٥٠٠ عامل تتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ٦٠ وانحرافه المعيارى ١٢ فأوجد عدد العمال فأوجد : ١) الذين أجورهم لا تزيد عن ٥٤ ٢) الذين لا تقل أجورهم عن ٨١

٤) ينتج أحد المصانع أسطوانات أطوالها يتبع توزيعًا طبيعيًا متوسطه ٥٦ سنتيمترًا وانحرافه المعيارى ٢سنتيمترا، وتكون الأسطوانات المنتجة مقبولة إذا كان طولها ينحصر بين ٥١ ، ٦٠ سنتيمترا ،أخذت عينة عشوائية من ١٠٠٠ أسطوانة .كم عدد الأسطوانات المتوقع قبولها

الحمد لله الذى وفقنا في ذلك

مع تمنياتي بالتوفيق

Scanned by CamScanner