

# مذكرة التفاضل والاحصاء

الصف الثاني الثانوي

(القسم الأدبي)

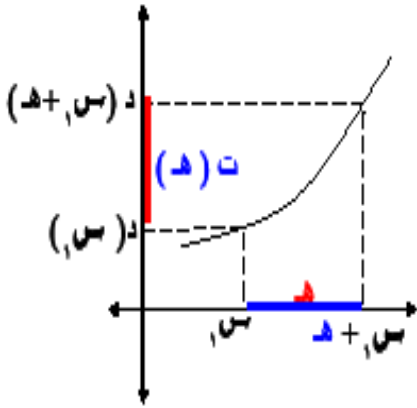
الفصل الدراسي الثاني

٢٠١٩ / ٢٠٢٠

متمنى توفيقه الرياضيات  
م / عادل إدوار

## دالة التغير – دالة متوسط التغير – معدل التغير

### دالة التغير:



نفرض أن:  $v = d(s)$  حيث  $d : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

ونفرض أن  $v$  قد تغيرت من  $v_1$  إلى  $v_2$  حينما

تغيرت  $s$  من  $s_1$  إلى  $s_2$  حيث  $s_1, s_2 \in [a, b]$

فإذا كان  $h$  هو مقدار التغير فى الإحداثى السينى

فإن:  $h = \Delta s = s_2 - s_1 \iff s_2 = s_1 + h$

ولكن  $v_1 = d(s_1)$ ،  $v_2 = d(s_2) = d(s_1 + h)$

∴ مقدار التغير فى الإحداثى الصادى  $\Delta v = v_2 - v_1$

∴ التغير فى الإحداثى الصادى  $d(s_1 + h) - d(s_1)$  يتغير المقدار بتغير  $h$

تسمى الدالة " دالة التغير "  $t(h) = d(s_1 + h) - d(s_1)$

مثال ١: إذا كانت  $d(s) = 3s - 2$  فأوجد: دالة التغير فى  $d$  عند

$s = 1$  ثم أوجد كلا من:  $t(2, 0)$ ،  $t(-0.5, 0)$

الحل

$$\therefore d(s) = 3s - 2$$

$$\therefore d(3) = 3 \times 1 - 2 = 1$$

$$d(s_1 + h) = d(1 + h) = 3(1 + h) - 2 = 3 + 3h - 2 = 1 + 3h$$

$$\therefore t(h) = d(s_1 + h) - d(s_1) = (1 + 3h) - 1 = 3h$$

$$\therefore t(2, 0) = 3 \times 2 = 6$$

$$t(-0.5, 0) = 3 \times (-0.5) = -1.5$$

دالة متوسط التغير: بقسمة دالة التغير  $t(h)$  على التغير فى  $s$  وهو  $h$  حيث

$h \neq 0$  نحصل على دالة تسمى دالة متوسط التغير فى  $d$  عند  $s = s_1$  "  $m(h)$  "

$$م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$$

مثال ٢: إذا كانت  $د(س) = س^٢ - ٨س + ١٥$  فأوجد : متوسط التغير في  $د$  عندما تتغير  $س$  من ٢ إلى ٢,٢

الحل

∴  $د(س) = س^٢ - ٨س + ١٥$  ، عندما تتغير  $س$  من ٢ إلى ٢,٢ ∴  $هـ = ٠,٢$

$$∴ د(س) = د(٢) = ١٥ - ١٦ + ٤ = ٣$$

$$∴ د(س+هـ) = د(٢+هـ) = (٢+هـ)^٢ - ٨(٢+هـ) + ١٥$$

$$∴ د(٢+هـ) = ٤ + ٤هـ + هـ^٢ - ١٦ - ٨هـ + ١٥ = ٣ - ٤هـ + هـ^٢$$

$$∴ ت(هـ) = د(س+هـ) - د(س) = (٣ - ٤هـ + هـ^٢) - ٣ = هـ^٢ - ٤هـ$$

$$∴ م(هـ) = \frac{ت(هـ)}{هـ} = \frac{هـ^٢ - ٤هـ}{هـ} = هـ - ٤$$

$$∴ متوسط التغير م(هـ) = ٠,٢ - ٤ = -٣,٨$$

معدل التغير : عندما تقترب  $(هـ)$  من الصفر قد يكون بها نهاية محددة ، كما أنه من المحتمل ألا توجد لها نهاية . إذا كانت  $م(هـ)$  إلى نهاية محددة عندما  $هـ \rightarrow ٠$  فإن : هذه النهاية تسمى "معدل تغير الدالة  $د$  عند النقطة  $س_١$ "

$$∴ معدل التغير للدالة عند  $س_١$  = نها  $\frac{د(س+هـ) - د(س)}{هـ}$$$

مثال ٣: إذا كانت  $د(س) = س^٢ - ٣س + ٤$  فأوجد : دالة التغير في  $د$  عند

$$س = ٣ \quad \text{ثم أحسب } ت(٠,٥)$$

الحل

$$∴ د(س) = س^٢ - ٣س + ٤$$

$$∴ د(٣) = ٣^٢ - ٣ \times ٣ + ٤ = ٤$$

مذكرة التفاضل والإحصاء / الصف الثاني الثانوي (القسم الأدبي) الفصل الدراسي الثاني ٢٠٢٠

$$\begin{aligned} & د (٣ + هـ) = (٣ + هـ) - (٣ + هـ) \times ٣ + ٤ \\ & ٩ + ٦ هـ + هـ^٢ - ٦ - ٣ هـ = ٤ + ٣ هـ + هـ^٢ \\ & \therefore ت (هـ) = د (٣ + هـ) - د (٣) = (٣ + هـ) - ٦ = هـ - ٣ \\ & \therefore ت (٠,٥) = (٠,٥) + ٣ \times (٠,٥) = ١,٧٥ \end{aligned}$$

مثال ٤- : إذا كانت  $د (س) = ٢س + ٥س - ١$  فأوجد : متوسط التغير في  $د$  عندما تتغير  $س$  من  $٤$  إلى  $٥$

الحل

$$\begin{aligned} & \therefore د (س) = ٢س + ٥س - ١ ، عندما تتغير  $س$  من  $٤$  إلى  $٥$ .  
 فإن :  $٤ = س$  ،  $١.٥ = ٤ - ٥.٥ = هـ$   
 $\therefore د (٤) = (٤) = ١ - ٤ \times ٥ + ٢ \times ٤ = ٥١$   
 $د (٤ + هـ) = (٤ + هـ) = ٢(٤ + هـ) + ٥(٤ + هـ) - ١$   
 $٣٢ + ١٦ هـ + ٢ هـ^٢ + ٢٠ + ٥ هـ - ١ = ٥١ + ٢١ هـ + هـ^٢$   
 $\therefore ت (هـ) = د (٤ + هـ) - د (٤) = (٢٠ + ٢١ هـ + هـ^٢) - ٥١ = ٢١ هـ + هـ^٢ - ٣١$   
 $\therefore ت (هـ) = ٢١ هـ + هـ^٢$   
 $\therefore م (هـ) = \frac{د (٤ + هـ) - د (٤)}{هـ} = \frac{٢١ هـ + هـ^٢}{هـ} = ٢١ + هـ$   
 $\therefore$  متوسط التغير  $م (هـ) = ٢١ + ١.٥ \times ٢ = ٢٤$$$

مثال ٦- : إذا كانت  $د (س) = ٣س - ٢س + ١$  فأوجد : معدل التغير للدالة  $د$  عند  $س = ٢$

الحل

$$\text{عند } س = ٢ \quad \therefore م (هـ) = \frac{د (٢ + هـ) - د (٢)}{هـ}$$

$$\therefore م (هـ) = \frac{[٣(٢ + هـ) - ٢(٢ + هـ) + ١] - [٣(٢) - ٢(٢) + ١]}{هـ}$$

$$= \frac{٦ + ٣ هـ - ٤ - ٢ هـ + ١ - ٦ + ٤ - ١ + ٢ هـ - ٤ + ١}{هـ} = \frac{٢ هـ + ١}{هـ} = ٢ + \frac{١}{هـ}$$

أعداد ١/ عادل إدوار

(٣)

متمنى توجبه الرياضيات

∴ معدل التغير للدالة عند  $s = 2$  هو

$$\text{نها } m(ه) = \text{نها } (ه + 1) = 1$$

مثال ٧: صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالتسخين بحيث تظل محتفظة بشكلها أوجد :

(١) متوسط التغير في مساحتها عندما يتغير طول ضلعها من ١٠ إلى ١٠,٣ سم

(٢) معدل التغير في مساحتها عندما يكون طول ضلعها ١٥ سم

### الحل

بفرض أن : طول ضلع الصفيحة =  $s$  سم ، مساحتها =  $v = s^2$  سم<sup>٢</sup>

، عندما يتغير طول ضلع الصفيحة  $s$  من ١٠ إلى ١٠,٣

$$\Delta v = (v_2 - v_1) = (s_2^2 - s_1^2) = (10.3^2 - 10^2) = 6.09$$

$$\therefore m(ه) = \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{6.09}{0.3} = 20.3$$

$$\therefore \text{متوسط التغير} = 20.3 = 20 + 0.3$$

عند  $s = 15$  يكون :

$$\therefore m(ه) = \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{(15^2 - 10^2)}{(15 - 10)} = \frac{125}{5} = 25$$

$$\therefore \text{معدل التغير في المساحة} = \text{نها } m(ه) = \text{نها } (ه + 30) = 30$$

### تمارين

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) إذا كان متوسط التغير في  $d(s) = 2,4$  عندما تتغير  $s$  من ٣ إلى ٣,٢ فإن التغير في  $d = \dots$

- Ⓐ ٠,٢٣      Ⓑ ٠,٤٨      Ⓒ ٣,٦      Ⓓ ٧,٢

(٢) إذا كان متوسط التغير في  $d(s) = 5$  عندما تتغير  $s$  من ٢ إلى ٤ ، في  $d(2) = 6$  فإن

- Ⓐ  $d(4) = \dots$       Ⓑ ٤-      Ⓒ ٧      Ⓓ ٨      Ⓔ ١٦

(٣) متوسط التغير في حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ سم إلى ٧ سم يساوى ...

- Ⓐ ١٢٥      Ⓑ ٣٤٣      Ⓒ ٢١٨      Ⓓ ١٠٩

(٤) متوسط التغير في  $d(s) = s^2 + 3s + 5$  عندما تتغير  $s$  من ١ إلى ٣ يساوى ...

- Ⓐ ١      Ⓑ ٣      Ⓒ ٧      Ⓓ ٩

### ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية

١) إذا كانت د(س) = س<sup>٢</sup> + ١ فأوجد دالة التغير ت(هـ) ثم احسب مقدار التغير عندما

تتغير س من ٢ إلى ١, ٢

٢) إذا كانت د(س) = س<sup>٢</sup> + س فأوجد دالة التغير ت(هـ) ثم احسب مقدار التغير عندما

تتغير س من ٣ إلى ١, ٣

٣) إذا كانت د(س) = س<sup>٢</sup> + س<sup>٣</sup> فأوجد دالة التغير عندما س = ٢ ثم احسب ت(٣, ٠)

٤) إذا كانت د(س) = س<sup>٢</sup> - س<sup>٣</sup> + ١ فأوجد دالة التغير عندما س = ١

ثم احسب م(٠, ٥)

٥) إذا كانت د(س) = س<sup>٢</sup> + ٢ فأوجد دالة متوسط التغير م(هـ) ثم احسب مقدار

التغير عندما تتغير س من ٢ إلى ٣

٦) إذا كانت د(س) = س<sup>٢</sup> - س<sup>٣</sup> + ١ فأوجد دالة متوسط التغير م(هـ) ثم احسب

مقدار التغير عندما تتغير س من ٣ إلى ٥, ٣

٧) اوجد دالة متوسط التغير للدالة د(س) =  $\sqrt{s}$  عندما تتغير س من ١ إلى ٤

ثم احسب معدل التغير عندما س = ٩

٨) إذا كانت د(س) = س<sup>٢</sup> + س<sup>٣</sup> فأوجد م(هـ) عندما س = ١ ثم احسب م(٣, ٠)

٩) اوجد دالة متوسط التغير للدالة د(س) = س<sup>٢</sup> + ١ : احسب معدل التغير عندما س = ١

١٠) اوجد دالة متوسط التغير للدالة د(س) = س<sup>٢</sup> - س<sup>٢</sup> س ثم احسب معدل التغير عندما س = ٢

١١) إذا كانت د(س) = س<sup>٢</sup> + ح + ٤ حيث ب ، ح ثابتان فأوجد قيمة كلا

من ب ، ح إذا كان د(٣) = ٤ ؛ عندما س = ٣ فإن ت(٠, ٥) = ١, ٧٥

١٢) إذا كانت د(س) =  $\frac{2}{1-s}$  فأوجد دالة متوسط التغير عندما تتغير س من ١ إلى ١, ١

١٣) إذا كانت د(س) = س<sup>٢</sup> + ح حيث ب ، ح ثابتان فأوجد قيمة كلا من ب ، ح

١٤) قرص دائري يتمدد بانتظام محتفظاً بشكله أوجد متوسط التغير في مساحة سطحه

عندما يزداد طول نصف قطره من ٣ إلى ٣, ١ ثم احسب معدل التغير في مساحة

سطحه عندما يكون طول نصف قطره مساوياً ٥ سم



### قواعد الاشتقاق :

( ١ ) إذا كانت : د (س) = ل حيث ل ثابت فإن : د' (س) = صفر

مثال : إذا كانت : د (س) = ٤ فإن : د' (س) = صفر

، إذا كانت : د (س) = ٧ - ص : ص' = صفر

\*\*\*\*\*

( ٢ ) إذا كانت : د (س) = س<sup>٧</sup> حيث  $\exists \text{ ح}$  فإن : د' (س) = س<sup>٧-١</sup>

مثال : إذا كانت : د (س) = س<sup>٤</sup> فإن : د' (س) = س<sup>٤-١</sup> = س<sup>٣</sup>

مثال : إذا كانت : د (س) = س<sup>٧</sup> فإن : د' (س) =  $\frac{٧}{٥}$  س<sup>٧-١</sup> = س<sup>٦</sup>

مثال : إذا كانت : د (س) = س<sup>٣-</sup> فإن : د' (س) = س<sup>٣-١-</sup> = س<sup>٢-</sup>

مثال : إذا كانت : د (س) = س<sup>١.٥</sup> : ص' = س<sup>١.٥-١</sup> = س<sup>٠.٥</sup>

مثال : إذا كانت : د (س) = س فإن : د' (س) = س<sup>١-١</sup> = ١

\*\*\*\*\*

( ٣ ) إذا كانت : د (س) = ح س<sup>٧</sup> حيث ح ثابت ،  $\exists \text{ ح}$

فإن : د' (س) = ح س<sup>٧-١</sup>

مثال : إذا كانت : د (س) = ٩ س فإن : د' (س) = ٩ = ١ × ٩

مثال : إذا كانت : د (س) = ٥ س<sup>٤</sup> فإن : د' (س) =  $\frac{٥}{٥}$  س<sup>٤-١</sup> = ١ س<sup>٣</sup>

مثال : إذا كانت : د (س) =  $\frac{١}{٣}$  س<sup>٦</sup> فإن : د' (س) =  $\frac{١}{٣} \times ٦$  س<sup>٦-١</sup> = ٢ س<sup>٥</sup>

مثال : إذا كانت : د (س) = ٨ س<sup>٢-</sup> : ص' = (٢-) × ٨ س<sup>٢-١-</sup> = ١٦ س<sup>١-</sup>

مثال : إذا كانت : د (س) = ٦ س<sup>١</sup> فإن : د' (س) =  $\frac{٦}{٥}$  س<sup>١-١</sup> = ٦ س<sup>٠</sup>



( ٤ ) إذا كانت : د ( س ) = ( س ) ر ± ( س ) ق ± ( س ) ل ± ..... ( س )

فإن : د' ( س ) = ( س ) ر' ± ( س ) ق' ± ( س ) ل' ± ..... ( س )

مثال ١ : إذا كانت : د ( س ) = ٢ س' + ٧ س - ٥

فإن : د' ( س ) = ٧ + ٤ س

\*\*\*\*\*

مثال ٢ : إذا كانت : د ( س ) = ٤ س' + ٣ س + ٢ - س - ١

د' ( س ) = ١٢ س' + ٢ س + ١

∴ د' ( س ) = ٢ = ١٢ × ١ + ٢ × ١ - ١ = ١٢ + ٢ - ١ = ١١

\*\*\*\*\*

مثال ٣ : د ( س ) = ( ٣ + ٢ س ) ( ٥ - س ) أوجد د' ( س ) عندما : س = ٢

نفك الأقواس ∴ د ( س ) = ٢ س' - ٧ س - ١٥

∴ د' ( س ) = ٧ - ٤ س

عندما س = ٢ ∴ د' ( س ) = ٧ - ٢ × ٤ = ٧ - ٨ = -١

\*\*\*\*\*

مثال ٤ : إذا كانت : د ( س ) = ١ س' - ٢ س + ٣ س' - ٤ س' - ٥ س - ١

فإن : د' ( س ) = ٢ س' - ٢ س + ٥ س - ١

\*\*\*\*\*

مثال ٥ : إذا كانت : د ( س ) = ١٥ س' + ٦ س - ٢ س

تكتب على الشكل د ( س ) = ١٥ س' + ٦ س - ٢ س

فإن : ص' = ١٥ س' - ١٢ س + ٢ س

∴ ص' = ١٥ س' - ١٢ س + ٢ س

مثال ٦ : إذا كانت : د (س) =  $\sqrt{s}$  أوجد : د' (س)

الحل

$$د (س) = (س)^{\frac{1}{2}} \therefore د' (س) = \frac{1}{2} (س)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{s}}$$

\*\*\*\*\*

مثال ٧ : إذا كانت : د (س) =  $\sqrt[3]{s}$  أوجد : د' (س)

الحل

$$د (س) = (س)^{\frac{1}{3}} \therefore د' (س) = \frac{1}{3} (س)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{s^2}}$$

\*\*\*\*\*

مثال ٨ : إذا كانت : د (س) =  $\sqrt[3]{s}$  أوجد : د' (س)

الحل

$$د (س) = (س)^{\frac{1}{3}} \therefore د' (س) = \frac{1}{3} (س)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{s^2}}$$

\*\*\*\*\*

مثال ٩ : إذا كانت : د (س) =  $\frac{(1 + s^2)}{s^2}$  أوجد :  $\frac{وص}{وس}$

الحل

$$\begin{aligned} \therefore د (س) &= \frac{(1 + s^2)}{s^2} = \frac{(1 + s^2)}{s^2} \\ د (س) &= s^{-2} + s^0 \\ \therefore \frac{وص}{وس} &= -2s^{-3} - 0 = -\frac{2}{s^3} \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*

مثال ١٠ : إذا كانت : د (س) =  $s^3 + s^6 - 3s^4$

فأوجد : د' (١) ثم اوجد قيم س التي تجعل د' (س) = صفر

الحل

منذى توجيه الرياضيات

(٩)

أعداد ٨ / عادل إدوار

$$\therefore د' (س) = ٣س' + ١٢س - ٣٦$$

$$\therefore د' (١) = ٣(١) + ١٢(١) - ٣٦ = ٢١ - ٣٦ = -١٥$$

$$\text{بوضع د' (س) = صفر} \therefore ٣س' + ١٢س - ٣٦ = ٠ \text{ بالقسمة على ٣}$$

$$\therefore ٣س' + ١٢س - ٣٦ = ٠ \therefore (٣س' + ١٢س) = ٣٦$$

$$\therefore ٣س' = ٣٦ - ١٢س \therefore ٣س' = ٣٦ - ١٢س$$

\*\*\*\*\*

$$\text{مثال ١١-ال : إذا كانت : د (س) = } \frac{س}{٣} - ٢س' - ٥س + ٤$$

$$\text{اوجد قيم س التي تجعل د' (١) = صفر د' (٢) = ٧}$$

**الحل**

$$\therefore د (س) = \frac{س}{٣} - ٢س' - ٥س + ٤$$

$$\therefore د' (س) = \frac{١}{٣} - ٢س' - ٥س$$

$$\text{أولاً : د' (س) = ٠} \iff \frac{١}{٣} - ٢س' - ٥س = ٠ \iff (١ - ٦س' - ١٥س) = ٠$$

$$\therefore ١ - ٦س' - ١٥س = ٠ \therefore ١ = ٦س' + ١٥س$$

$$\text{ثانياً : د' (س) = ٧} \iff \frac{١}{٣} - ٢س' - ٥س = ٧$$

$$\therefore \frac{١}{٣} - ٢س' - ٥س = ٧ \iff ١ - ٦س' - ١٥س = ٢١ \iff (١ - ٦س' - ١٥س) = ٢١$$

$$\therefore ١ - ٦س' - ١٥س = ٢١ \therefore ١ = ٢٢ + ٦س' + ١٥س$$

\*\*\*\*\*

**تذكر ما يلى :**

\* ميل المماس للمنحنى ص عند النقطة (س، ص) الواقعة عليه هو :

$$\left( \frac{ص}{س} \right) = \text{طا ه حيث ( ه ) قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع}$$

الاتجاه الموجب لمحور السينات

فإن : ميل المماس = صفر

\* إذا كان : المماس يوازي محور السينات

فإن : ميل المماس غير معرف

\* إذا كان : المماس يوازي محور الصادات

• ميل المستقيم :  $m = \frac{p}{b} + \frac{v}{s}$

• هو  $\frac{p - \text{معامل } s}{b} = \frac{\text{معامل } v}{\text{معامل } s}$

\* ميل أى مستقيم يوازيه  $\frac{p}{b}$  \* ميل أى مستقيم عمودى عليه  $-\frac{b}{p}$

أى أن : المستقيمان المتوازيان ميلاهما متساويان

أما المستقيمان المتعامدان فحاصل ضرب ميلاهما  $= -1$

\* ميل المستقيم المار بالنقطتين  $(s_1, v_1)$  ،  $(s_2, v_2)$

$$\frac{v_1 - v_2}{s_1 - s_2} \text{ يساوى}$$

\* معادلة المستقيم بمعلومية ميله وإى نقطة واقعة عليه  $(s_1, v_1)$  هى :

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{v_1 - v_2}{s_1 - s_2} = m$$

\* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى  $v = d(s)$  مع محور السينات نضع :  $v = 0$

\* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى  $v = d(s)$  مع محور الصادات نضع :  $s = 0$

\* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى  $v = d(s)$  مع المستقيم  $v = m s + c$

نضع :  $v = 0$

\*\*\*\*\*

مثال ١- أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس المنحنى الدالة :  $v = s^3 - s^2$

مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة  $(2, -2)$  الواقعة عليه

الحل

$$\frac{dv}{ds} = \text{ظا هـ} = 3s^2 - 2s = 2 \text{ (بأنهـ)} \Rightarrow s = 2$$

$$\therefore \text{ظا هـ} = 4$$

$$\therefore \text{ظا هـ} = 1$$

\*\*\*\*\*

مثال ٢- أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس للمنحنى :  $v = s^3 - s^2 - s$

عند النقطة  $(1, 1)$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

### الحل

$$\therefore \text{ص} = \text{س}^3 - \text{س}^5$$

$$\therefore \frac{\text{و}}{\text{س}} = \text{ظا ه} = \text{س}^3 - \text{س}^5 \therefore \text{ميل المماس عند } (1, 1)$$

$$\therefore \frac{\text{و}}{\text{س}} = \text{ظا ه} = \text{س}^3 - \text{س}^5 = 3 - 5 = -2$$

$$\therefore \text{ظا ه} = -2 \text{ ومنها : ه} = \frac{3}{33} / 116^\circ$$

\*\*\*\*\*

مث٣-ال : أوجد النقط الواقعة على المنحنى :  $\text{ص} = \text{س}^6 - \text{س}^4 + \text{س}^3$  والتي يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات

### الحل

$$\text{ص} / \text{س} = \text{س}^6 - \text{س}^4 \therefore \text{ميل المماس} = \text{س}^6 - \text{س}^4$$

$$\therefore \text{المماس يوازي محور السينات} \therefore \text{ميله} = \text{صفر}$$

$$\therefore \text{ص} / \text{س} = 0 \therefore \text{س}^6 - \text{س}^4 = 0 \text{ ومنها : س} = 0$$

$$\therefore \text{ص} = \text{س}^6 - \text{س}^4 + \text{س}^3 = 0 - 0 + 0 = 0$$

$$\therefore \text{المماس للمنحنى يوازي محور السينات عند } (0, 0)$$

\*\*\*\*\*

مث٤-ال : أوجد النقط الواقعة على المنحنى :  $\text{ص} = \frac{\text{س}^3}{3} + \frac{\text{س}^2}{2} - \text{س}^2$  والتي ميل المماس عندها = ١

### الحل

$$\therefore \text{المماس يصنع زاوية قياسها } 45^\circ \text{ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات}$$

$$\therefore \text{ميل المماس عند أى نقطة} = \frac{\text{و}}{\text{س}} = \text{س}^2 + \text{س} - 1 = 1$$

$$\therefore \text{س}^2 + \text{س} - 1 = 1 \iff (\text{س} - 1)(\text{س} + 2) = 0$$

$$\therefore \text{س} = 1 \therefore \text{ص} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{6} \therefore \text{النقطة } (-\frac{1}{6}, 1)$$

$$\text{أ، س} = -2 \therefore \text{ص} = \frac{1}{3} \times 8 - \frac{1}{2} \times 4 + 1 - 2 = \frac{1}{3} \therefore \text{النقطة } (\frac{1}{3}, -2)$$

مثـ٥ـال : أوجد النقط الواقعة على المنحنى :  $ص = س^3 - ٣س^٢ + ١$  والتي يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم :  $٣ص = ٦ + س$

الحـل

$$\frac{وص}{وس} = م = ٣س^٢ - ٦ ، \quad \therefore \text{ميل المستقيم} = \frac{١}{٣}$$

،  $\therefore$  المماس والمستقيم متعامدان  $\therefore$  ميل المماس  $= -٣$

$$\therefore ٣س^٢ - ٦ = -٣ \Rightarrow ٣س^٢ = ٣ \Rightarrow س = ١ \text{ ومنها : } ٣ص = ٦ + س = ٧ \Rightarrow ص = \frac{٧}{٣}$$

$$\therefore س = ١ \quad \text{فإن : } ص = ١ - ٣(١)^٢ + ١ = -١ \quad \therefore \text{النقط هي : } (١, -١)$$

$$، \quad س = -١ \quad \text{فإن : } ص = ١ - ٣(-١)^٢ + ١ = -١ \quad \therefore \text{النقط هي : } (-١, -١)$$

\*\*\*\*\*

مثـ٦ـال : أوجد معادلة المماس للمنحنى :  $ص = ٢س^٣ + ٦س^٢ + ٥س$  و الذى

يصنع زاوية قياسها  $١٣٥^\circ$  مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

الحـل

$$\frac{وص}{وس} = \frac{٦س^٢ + ١٢س + ٥}{٢س^٣ + ١٢س^٢ + ٥س} \quad \therefore \text{ميل المماس} = \text{طا هـ} = \text{طا ١٣٥} = -١$$

$$\therefore ٦س^٢ + ١٢س + ٥ = -١$$

$$\therefore ٦س^٢ + ١٢س + ٦ = ٠ \quad \therefore ٦(س^٢ + ٢س + ١) = ٠$$

$$\therefore س = -١ \quad \therefore ص = ١$$

$\therefore$  المماس للمنحنى عند  $(-١, ١)$  يصنع زاوية قياسها  $١٣٥^\circ$  مع الإتجاه

الموجب لمحور السينات

$$\text{وتكون معادلته هي : } ١ - ص = \frac{١ + ص}{١ + س} \quad \text{أى : } ص + س + ٢ = ٠$$

## تمارين

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

- (١) معدل تغير  $s^2$  -  $s^1$  بالنسبة إلى  $s$  عندما  $s = 3$  يساوى ...  
 (أ) ٣ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) ٨
- (٢) ميل المماس للمنحنى  $s = s^2 - s^1$  عند  $s = 1$   
 (أ) ٣- (ب) ٣ (ج) ١ (د) ١-
- (٣) المماس للمنحنى  $s = s^2 + s^1 - s^0$  يوازي محور السينات عند  $s$  يساوى ...  
 (أ) ٦ (ب) ٥ (ج) ٣ (د) ٣-
- (٤) المستقيم  $s + v = 5$  يمس المستقيم  $s = s^3 + s^2 + s^1 + 1$  عند  $s = \dots$   
 (أ) ١ (ب) ٥ (ج) ٣ (د) ١-

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية

١ - أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :-

- (١)  $d(s) = s^3 - s^2 + s^1 + 2$  ثم أوجد  $d'(1)$
- (٢)  $d(s) = (s^0 + s^1 + s^2 + s^3) \div (s)$  ثم أوجد  $d'(1)$
- (٣)  $d(s) = (s^2 - 27) \div (s - 3)$  ثم أوجد  $d'(2)$
- (٤)  $v = s - s^1 + s^3$  عند  $s = 1$
- (٥)  $v = \frac{1}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s^3}$  عند  $s = 1$
- (٦)  $d(s) = \frac{s^1}{s^2} + \frac{s^2}{s^1}$  ثم أوجد  $d'(1)$
- (٧)  $d(s) = s^3 + s^4$  ثم أوجد  $d'(1)$

٢ - أوجد معدل تغير كلا من الدوال الآتية عند قيم  $s$  المبينة أمام كلا منها :

- (١)  $d(s) = s^1 + s^2 - 1$  عند  $s = 1$
- (٢)  $d(s) = s^3 + s^2$  عند  $s = 1$

٣ - أوجد ميل المماس لمنحنيات الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كلا منها :

- (١)  $v = s^1 + s - 5$  عند النقطة (١، ٢)
- (٢)  $v = s^2 - s^4 + 3$  عند نقط تقاطعه مع محور السينات
- (٣)  $v = s^3 - s^2 + s^1 - 1$  عند نقط تقاطعه مع محور الصادات

٤ - أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنيات الدوال الآتية مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقط المبينة أمام كل منها :

(١)  $\text{ص} = ٣س - ٥س + ١$  عند النقطة (١، ١)

(٢)  $\text{ص} = ٣س - ٥س + ١$  عند النقطة (١، ٢)

٥ - أوجد النقط الواقعة علي منحنيات الدوال الآتية وتحقق الشروط المبينة أمام كلا منها

(١)  $\text{ص} = ٣س - ٤س + ١$  ، المماس // محور السينات

(٢)  $\text{ص} = ٣س - ٣س - ٩س + ١٥$  ، المماس // محور السينات

(٣)  $\text{ص} = ٥س + ٢س - ١٨$  ، المماس // المستقيم  $٢٢س - \text{ص} + ١٢ = ٠$

(٤)  $\text{ص} = ٣س - ٤س + ٢$  ، المماس  $\perp$  المستقيم  $\text{ص} = \text{ص} - ٤$

٦ - أوجد قيم الثوابت ب؛ د؛ ء والتي تحقق الشروط المعطاه فيما يلي :

(١)  $\text{د} (س) = ٣س + ب + د$  ، المماس عند النقطة (١، ٦) أفقي

(٢)  $\text{د} (س) = دس + ٦س$  ،  $\text{د} (٢) = ٢$  ؛  $\text{د} (٠) = ٣$

(٣)  $\text{د} (س) = ب + ٣س + دس$

والمنحني يمس المستقيم  $\text{ص} = ٣س + ٢$  عند النقطة (١، ١)

(٤)  $\text{د} (س) = دس + ٦س$

والمنحني يمس المستقيم  $\text{ص} = ٨س + ٥$  عند النقطة (١، ١٥)

(٥)  $\text{د} (س) = دس + ٦س$  والمماس عند النقطة (١، ٠) يصنع مع

الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها  $٤٥^\circ$

٧ - أوجد معادلة المماس فيما يلي :

(١)  $\text{ص} = ٢س - ٣س + ١$  عند النقطة (١، ٠)

(٢)  $\text{ص} = ٣س - ٣س + ٢$  عند النقطة (٠، ١)

(٣)  $\text{ص} = (١ + س)(٢ - ٣س)$  عند النقطة :  $\text{ص} = ١$

٨ - إثبت أن المماسين لمنحني الدالة  $\text{ص} = ٣س - ٣س$  عند النقطتين (٣، ٠)

؛ (١، ٤) متوازيان

٩ - إثبت أن المماسين لمنحني الدالة  $\text{ص} = ٣س - ٣س + ٣$  عند النقطتين (٣، ٠)

؛ (١، ٣) متعامدين

١٠ - إذا كانت :  $\text{د} (س) = س \times \text{و} (س)$  ، وكانت :  $\text{و} (١) = ٣$  ،

$\text{و} (١) = ٢$  فأوجد :  $\text{د} (١)$



## مشتقة حاصل ضرب دالتين

(٥) المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين:

المشتقة الأولى لحاصل ضرب دالتين قابلتين للإشتقاق =

مشتقة الدالة الأولى × الدالة الثانية + مشتقة الدالة الثانية × الدالة الأولى

فإذا كانت : د ، م دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت ص = د (س) × م (س)

فإن :  $\frac{ص}{س} = \frac{د}{س} \times م (س) + د (س) \times \frac{م}{س}$

\*\*\*\*\*

مثال ١- أوجد المشتقة الأولى لكلا من الدوال الآتية

$$(!) \text{ ص} = (١ - س^٢)(٥ + س^٣) \quad (!!)\text{ ص} = (٧ + س^٢)(١ - س^٣)$$

الحل

$$(!) \text{ ص}' = (٥ + س^٣)'(١ - س^٢) + (١ - س^٢)'(٥ + س^٣) = ٣ - س^٦ + ١٠ + س^٦ = ١٣$$

$$(!!)\text{ ص}' = (٧ + س^٢)'(١ - س^٣) + (١ - س^٣)'(٧ + س^٢) = ٢ - س^٦ + ٢١ + س^٦ = ٢٣$$

$$= ٥ س^٤ + ٢١ س^٢ - ٢ س$$

\*\*\*\*\*

مثال ٢- أوجد المشتقة الأولى لكلا من الدوال الآتية

$$(!) \text{ ص} = (١ + س^٢)(٥ + س^٣) \quad (!!)\text{ ص} = (٨ + س^٣) س^٥$$

الحل

$$(!) \text{ ص}' = (٥ + س^٣)'(١ + س^٢) + (١ + س^٢)'(٥ + س^٣) = ٤ س^٢ + ١٠ س^٤ = ١٤ س^٢ + ١٠ س^٤$$

$$= ٦ س^٦ + ٦ س^٢ + ٨ س^٦ + ٢٠ س^٢ = ٢٦ س^٦ + ٢٦ س^٢$$

$$(!!)\text{ ص}' = ٥ س^٤ + (٨ + س^٣)' س^٥ + (٨ + س^٣) س^٤ = ١٥ س^٤ + ٤٠ س^٤ + ٨ س^٤ + ٣ س^٧ = ٦٣ س^٤ + ٣ س^٧$$

\*\*\*\*\*

مثال ٣- أوجد المشتقة الأولى لكلا من الدوال الآتية

$$(!) \text{ ص} = (١ + س^٢)(٥ + س^٣ - س^٢) \quad (!!)\text{ ص} = (س + \frac{١}{س}) س^٥$$

الحل

$$(!) \text{ ص} = 2\text{س} = (2\text{س} - 3 + 5) + (3 - 2\text{س})(1 + 2\text{س})$$

$$= 2\text{س}^2 - 3\text{س} + 10 + 2\text{س}^2 + 3\text{س} - 2\text{س}^2 - 3\text{س} + 3 = 2\text{س}^2 - 3\text{س} + 10$$

$$= 2\text{س}^2 - 3\text{س} + 10 + 2\text{س}^2 - 3\text{س} + 3 = 4\text{س}^2 - 6\text{س} + 13$$

$$(!!) \text{ ص} = 2\text{س} = (2\text{س} - 3 + 5) + (3 - 2\text{س})(1 + 2\text{س})$$

$$\therefore \text{ص} = 2\text{س} = (2\text{س} - 3 + 5) + (3 - 2\text{س})(1 + 2\text{س})$$

$$= 2\text{س}^2 - 3\text{س} + 10 + 2\text{س}^2 - 3\text{س} + 3 = 4\text{س}^2 - 6\text{س} + 13$$

\*\*\*\*\*

مثال: أوجد المشتقة الاولى لكلا من الدوال الآتية

$$(!) \text{ ص} = 2\text{س} = (2\text{س} - 3 + 5) + (3 - 2\text{س})(1 + 2\text{س})$$

الحل

$$(!) \text{ ص} = 2\text{س} = (2\text{س} - 3 + 5) + (3 - 2\text{س})(1 + 2\text{س})$$

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 2\text{س} = (2\text{س} - 3 + 5) + (3 - 2\text{س})(1 + 2\text{س})$$

$$(!!) \text{ ص} = 2\text{س} = (2\text{س} - 3 + 5) + (3 - 2\text{س})(1 + 2\text{س})$$

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{س}} = 2\text{س} = (2\text{س} - 3 + 5) + (3 - 2\text{س})(1 + 2\text{س})$$

\*\*\*\*\*

نتيجة :- مشتقة حاصل ضرب ثلاث دوال

$$= \text{مشتقة الاولى} \times \text{الثانية} \times \text{الثالثة} + \text{مشتقة الثانية} \times \text{الاولى} \times \text{الثالثة} + \text{مشتقة الثالثة} \times \text{الاولى} \times \text{الثانية}$$

$$+ \text{مشتقة الثانية} \times \text{الاولى} \times \text{الثالثة}$$

$$\text{إذا كانت ص} = \text{د} \times \text{ر} \times \text{و} \text{ فإن}$$

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\text{و}} = \frac{\text{د}}{\text{و}} \times \text{ر} + \frac{\text{ر}}{\text{و}} \times \text{د} + \frac{\text{و}}{\text{و}} \times \text{د} \times \text{ر}$$

\*\*\*\*\*

مثال: أوجد المشتقة الاولى للدالة : د (س) = (2س + 5) (1 + 2س) (2 - 3س)

الحل

$$\text{د}' (س) = (2\text{س} + 5) (1 + 2\text{س}) (2 - 3س) + (2 - 3س) (1 + 2\text{س}) (2) + (2\text{س} + 5) (2) (1 + 2\text{س})$$

$$+ (2\text{س} + 5) (2) (1 + 2\text{س})$$

أعداد ٨ / عادل إدوار

## مشتقة قسمة دالتين

(٦) المشتقة الأولى لخارج قسمة دالتين :

$$\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتقة المقام} \times \text{البسط}}{\text{مربع المقام}}$$

فإذا كانت : د ، ر دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير س

وكانت :  $\frac{د(س)}{ر(س)}$  حيث  $ر(س) \neq 0$

$$\frac{د'(س) \times ر(س) - (د(س) \times ر'(س))}{(ر(س))^2} = \frac{وص}{وس}$$

فإن :  $\frac{وص}{وس}$

\*\*\*\*\*

مثال ٦ : أوجد المشتقة الأولى للدالة  $ص = \frac{٢س - ٥}{٣س + ٢}$

**الحل**

$$ص' = \frac{(٢س + ٢)'(٢س - ٥) - (٢س - ٥)'(٣س + ٢)}{(٣س + ٢)^2}$$

$$= \frac{١٩}{(٣س + ٢)^2} = \frac{١٥س + ٦س - ٤ + ١٥}{(٣س + ٢)^2}$$

\*\*\*\*\*

مثال ٧ : أوجد المشتقة الأولى للدالة  $ص = \frac{٢س + ٣}{٢س - ٢}$

**الحل**

$$ص' = \frac{(٢س + ٣)'(٢س - ٢) - (٢س - ٢)'(٢س + ٣)}{(٢س - ٢)^2}$$

$$= \frac{١٠س - ١٠}{(٢س - ٢)^2} = \frac{٢س^٢ - ٤س - ٣س^٢ - ٦س}{(٢س - ٢)^2}$$

مثـ ٨ـال : أوجد المشتقة الاولى للدالة  $d(s) = \frac{s+1}{s-1}$

الحـل

$$\frac{2}{(s-1)^2} = \frac{s+1+s-1}{(s-1)^2} = \frac{(s+1)(1) - (s-1)(1)}{(s-1)^2} = \frac{2}{(s-1)^2}$$

\*\*\*\*\*

مثـ ٩ـال : أوجد المشتقة الاولى للدالة  $v(s) = \frac{s^2}{s^2+3}$

الحـل

$$\frac{2s}{(s^2+3)^2} = \frac{2s \times 1 - (s^2+3) \times 2s}{(s^2+3)^2} = \frac{2s - 2s(s^2+3)}{(s^2+3)^2} = \frac{2s - 2s^3 - 6s}{(s^2+3)^2} = \frac{-2s^3 - 4s}{(s^2+3)^2}$$

\*\*\*\*\*

مثـ ١٠ـال : إذا كانت  $v(s) = \frac{s^3 - 4}{s^2 + 5}$  أوجد  $\frac{dv}{ds}$

الحـل

$$\frac{3s^2}{(s^2+5)^2} = \frac{(s^3-4)(2s) - (s^2+5)(3s^2)}{(s^2+5)^2} = \frac{2s^4 - 8s - 3s^4 - 15s^2}{(s^2+5)^2} = \frac{-s^4 - 15s^2 - 8s}{(s^2+5)^2}$$

\*\*\*\*\*

تذكر ما يلى :

\* ميل المماس للمنحنى  $v$  عند النقطة  $(s_1, v_1)$  الواقعة عليه هو :

$(\frac{dv}{ds})_{s=s_1} = \text{طا هـ}$  حيث  $(\text{هـ})$  قياس الزاوية الموجبة التى يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

\* ميل المستقيم :  $P = s + b$  هو  $\frac{P}{b} = \frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

\* ميل أى مستقيم يوازيه  $\frac{P}{b}$  \* ميل أى مستقيم عمودى عليه  $\frac{b}{P}$

\* ميل المستقيم المار بالنقطتين  $(s_1, v_1)$  ،  $(s_2, v_2)$  يساوى  $\frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1}$

\* معادلة المستقيم بمعلومية ميله واى نقطة واقعة عليه (س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) هى :

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1} \quad \text{أ،} \quad \text{م} = (\text{ص}_2 - \text{ص}_1) / (\text{س}_2 - \text{س}_1)$$

\* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص = د (س) مع محور السينات نضع : ص = ٠

\* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص = د (س) مع محور الصادات نضع : س = ٠

\* لإيجاد نقط تقاطع المنحنى ص<sub>١</sub> = د (س) مع المستقيم ص<sub>٢</sub> = م + س + ح

نضع : ص<sub>١</sub> = ص<sub>٢</sub>

\*\*\*\*\*

مثال ١١ - أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص = (س - ٢) (س - ٣)

عند النقطة (٣ ، ٦)

الحل

$$\text{ميل المماس} = \text{م} = \text{ص}' = ١ + (س - ٣) = ١ + (٣ - ٢) = ٢$$

$$\text{س} = ٣ - \text{س} + ٢ = ٢ - \text{س} + ٣ = ٥$$

$$\text{عند النقطة (٣ ، ٦)} \quad \therefore \text{م} = ٢ \times ٣ - ٥ = ١$$

\*\*\*\*\*

مثال ١٢ - أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة ص =  $\frac{٣}{١ + \text{س}}$  عند النقطة (١ ، ١,٥)

الحل

$$\text{ميل المماس} = \text{م} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{ص}'}{\text{س}'} = \frac{\frac{٣ - \text{ص}}{(١ + \text{س})^2}}{\frac{١ \times ٣ - \text{صفر} \times (١ + \text{س})}{(١ + \text{س})^2}} = \frac{٣ - \text{ص}}{١ + \text{س}}$$

$$\text{عند النقطة (١ ، ١,٥)} \quad \text{م} = \frac{٣ - ١,٥}{١ + ١} = \frac{١,٥}{٢} = ٠,٧٥$$

\*\*\*\*\*

مثال ١٣ - أوجد قياس الزاوية التى يصنعها المماس لمنحنى الدالة

ص =  $\frac{٤}{١ + \text{س}}$  عند النقطة (٣ ، ٢) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

$$\text{ظاهر} = \frac{\text{وص}}{\text{وس}} = \frac{\text{ص}'}{\text{س}'} = \frac{\frac{٤ - \text{ص}}{(١ + \text{س})^2}}{\frac{١ \times ٤ - \text{صفر} \times (١ + \text{س})}{(١ + \text{س})^2}} = \frac{٤ - \text{ص}}{١ + \text{س}}$$

(٢٠)

منذى توجبه الرياضيات

أعداد ٢ / عادل إدوار

عند النقطة (٢-، ٣-)  $1 - = \frac{4-}{4} = \frac{4-}{(1+3-)} = \text{ظاهر}$

$\therefore \frac{\pi^3}{4} = 135^\circ = (\angle هـ)$

\*\*\*\*\*

مثلاً ١- أوجد قيم س التى عندها المماس التى عندها المماس لمنحنى الدالة

ص = ٢س<sup>٣</sup> - ٥س<sup>٢</sup> + ٣س + ٥ يصنع زاوية ١٣٥° مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات .

الحل

$\therefore$  المماس يصنع زاوية ١٣٥°  $\therefore$  ص = ظاهر ١٣٥° = ١ -

$\therefore$  ص = ٢س<sup>٣</sup> - ٥س<sup>٢</sup> + ٣س + ٥ = ١  $\therefore$  ٦س<sup>٣</sup> - ١٠س<sup>٢</sup> + ٦س + ١٠ = ١  $\therefore$  ٦س<sup>٣</sup> - ١٠س<sup>٢</sup> + ٦س + ٩ = ٠

$\therefore$  ٦س<sup>٣</sup> - ١٠س<sup>٢</sup> + ٦س + ٩ = ٠ نحل  $\therefore$  (٢س - ٣)(٣س + ٣) = ٠

ومنها  $\therefore$  ٢س = ٣ ، ٣س = -٣

\*\*\*\*\*

## تمارين

١ - أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية :-

(١) ص = (١ + س<sup>٣</sup>)(٥س - س<sup>٦</sup>) عند س = ٠

(٢) ص = (١ + س<sup>٦</sup>)(٣س<sup>٣</sup> - ٣) عند س = ٢

(٣) ص = س(٢س - ٣)(٣ + س) عند س = ٣ -

(٤) ص =  $\frac{١ - س}{٣}$  عند س = ٢

(٥) ص =  $\frac{١ - س}{٢ + س}$  عند س = ١ -

٢ - أوجد معدل تغير كلا من الدوال الآتية عند قيم س المبينة أمام كلا منها :

(١) د(س) = (٣س<sup>٦</sup> - ٣)(٤ + س) عند س = ٢

(٢) د(س) =  $\frac{٣س<sup>٦</sup> - ٣}{١ + س}$  عند س = ٢

٣ - أوجد ميل المماس لمنحنيات الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كلا منها :

(١)  $V = (S^2 + S)(S^2 - 3)$  عند النقطة  $(-1, 0)$

(٢)  $V = (S^2 - 3)(S^2 + 3)$  عند النقطة  $(1, 2)$

(٣)  $V = \frac{S^2 - 3}{S + 1}$  عند النقطة  $(1, 1)$

٤ - أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنيات الدوال الآتية مع الإتجاه الموجب لمحور السينات عند النقط المبينة أمام كل منها :

(١)  $V = S(5 - S^2)(1 + S)(3 - S)$  عند نقطة الأصل

(٢)  $V = \frac{S + 2}{S - 2}$  عند النقطة  $(0, -1)$

٥ - أوجد النقط الواقعة علي منحنيات الدوال الآتية والتي تحقق الشروط :

(١)  $V = (S^2 + 1)(S - 1)$

والمماس يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها  $135^\circ$

(٢)  $V = S^3 - S^2 + 1$

والمماس يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها  $45^\circ$

٦ - أوجد معادلة المماس فيما يلي :

(١)  $V = (S + 1)(S^2 - 2)$  عند النقطة :  $S = 1$

(٢)  $V = \frac{16}{S + 1}$  عند النقطة :  $S = 3$

٧ - إثبت أن المماسين لمنحني الدالة  $V = S^3 - 3S$  عند النقطتين

$(0, 3)$  ؛  $(-1, 4)$  متوازيان

٨ - إثبت أن المماسين لمنحني الدالة  $V = S^2 - S + 3$  عند النقطتين

$(0, 3)$  ؛  $(1, 3)$  متعامدين

٩ - إذا كانت :  $D(S) = S \times U(S)$  ، وكانت :  $U(1) = 3$  ،  $U(1) = 2$

فأوجد :  $D'(1)$

## مشتقة دالة الدالة

إذا كانت :  $v = [d(s)]^n$  فإن :  $\frac{dv}{ds} = n[d(s)]^{n-1} \times d'(s)$

مشتقة (قوس)  $\times$  مشتقة القوس = مشتقة ما بداخل القوس

فمثلاً :

إذا كانت :  $v = (5s + 1)^4$   
 فإن :  $\frac{dv}{ds} = 4(5s + 1)^3 \times 5 = 20(5s + 1)^3$

\*\*\*\*\*

مثال ١ : أوجد المشتقة الأولى للدالة  $v = (3 - s^2)^3$

الحل

$$\frac{dv}{ds} = 3(3 - s^2)^2 \times (-2s) = -6s(3 - s^2)^2$$

\*\*\*\*\*

مثال ٢ : أوجد المشتقة الأولى للدالة  $v = (s^3 + 5)^6$

الحل

$$\frac{dv}{ds} = 6(s^3 + 5)^5 \times 3s^2 = 18s^2(s^3 + 5)^5$$

\*\*\*\*\*

ملحوظة :

إذا كانت :  $v = \sqrt[n]{d(s)}$  فإن :  $\frac{dv}{ds} = \frac{1}{n} \sqrt[n-1]{d(s)} \times d'(s)$

فمثلاً :

إذا كانت :  $v = \sqrt[3]{1 + s^3}$   
 فإن :  $\frac{dv}{ds} = \frac{1}{3} \sqrt[2]{1 + s^3} \times 3s^2 = s^2 \sqrt[2]{1 + s^3}$

\*\*\*\*\*

مثال ٣ : أوجد المشتقة الأولى للدالة :  $v = \sqrt[3]{5s^2 - 3s + 2}$

الحل

$$v = \sqrt[3]{5s^2 - 3s + 2}$$

$$\therefore \frac{dv}{ds} = \frac{1}{3} (5s^2 - 3s + 2)^{-\frac{2}{3}} \times (10s - 3) = \frac{10s - 3}{3 \sqrt[3]{(5s^2 - 3s + 2)^2}}$$

أعداد / عادل إدوار



مثـ٤ـال : أوجد المشتقة الاولى للدالة  $y = \frac{5 - (3s^2 - s^4)}{(1 - s^6)}$

الحـل

$$y' = \frac{5 - (3s^2 - s^4)}{(1 - s^6)}$$

$$y' = \frac{5 - (3s^2 - s^4)}{(1 - s^6)}$$

$$y' = \frac{5 - (3s^2 - s^4)}{(1 - s^6)}$$

\*\*\*\*\*

مثـ٥ـال : أوجد المشتقة الاولى للدالة  $y = \sqrt[3]{(3 + s^2)^3}$  عندما  $s = 3$

الحـل

$$y = \sqrt[3]{(3 + s^2)^3}$$

$$y = \sqrt[3]{(3 + s^2)^3}$$

$$9 = 3 \times 3 = \sqrt[3]{3} \times 3 = \sqrt[3]{3 + 6} \times 3 = y' \quad \text{عندما } s = 3$$

\*\*\*\*\*

مثـ٦ـال : أوجد المشتقة الاولى للدالة  $y = \frac{5}{4} (1 + s^3 - s^2)$

الحـل

$$y = \frac{5}{4} (1 + s^3 - s^2)$$

$$y' = \frac{5}{4} (3s^2 - 2s) = \frac{5}{4} (3 - 2s) = \frac{5}{4} (3 - 2(1)) = \frac{5}{4} (3 - 2) = \frac{5}{4}$$

\*\*\*\*\*

نظرية :

إذا كانت  $y = f(x)$  دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى  $x$

،  $x = g(t)$  دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى  $t$

فإن : ص = د [ م ( س ) ] تكون قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

$$\text{ويكون : } \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} \times \frac{ع}{ع}$$

فمثلاً :

$$\text{إذا كانت : ص} = ع^1 + ١ ، ع = ٣ - س$$

$$\text{فإن : } \frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س} = (٨ ع^٧) \times (٣) = ٢٤ (٣ - س)^٧$$

نتيجة :

إذا كانت : ص دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س

$$\text{فإن : } \frac{ص}{س} = (ص^٧) \times ٧ = ٧ ص^٦ \times ١$$

فمثلاً :

$$\frac{ص}{س} \times ٣ = (ص^٤) \times ٤$$

$$\frac{ص}{س} (ص^٤ + ٥) = ٤ ص^٣ \times \frac{ص}{س} + ٥ ص^٤$$

\*\*\*\*\*

$$\text{مثال ٧ : إذا كانت ص} = ع^٥ ، ع = ١ + س^٢ \text{ أوجد } \frac{ص}{س}$$

الحل

$$\therefore \frac{ص}{س} = ٥ ع^٤ ، ، \frac{ع}{س} = ٢$$

$$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س} = ٥ ع^٤ \times ٢ = ١٠ ع^٤ = ١٠ (١ + س^٢)^٤$$

حل آخر

$$\therefore ص = ع^٥ = (١ + س^٢)^٥ \therefore \frac{ص}{س} = ٥ (١ + س^٢)^٤$$

\*\*\*\*\*

$$\text{مثال ٨ : إذا كانت ص} = ع^٦ + ٣ ، ع = س^٢ + ٥ \text{ أوجد } \frac{ص}{س}$$

الحل

$$\therefore ص = ع^٦ + ٣ = (س^٢ + ٥)^٦ + ٣$$

$$\therefore \frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س} = ٦ (س^٢ + ٥)^٥ \times ٢ س = ١٢ س (س^٢ + ٥)^٥$$

مث٩-ال : إذا كانت ص = ع° + ع³ ، ع = ٢س - ٧ أوجد  $\frac{وص}{وس}$

الحل

$$\therefore ص = (٢س - ٧)° + (٢س - ٧)³$$

$$\therefore \frac{وص}{وس} = ٥(٢س - ٧)⁴ + ٣(٢س - ٧)² \times ٢$$

$$\therefore \frac{وص}{وس} = ١٠(٢س - ٧)⁴ + ٦(٢س - ٧)²$$

\*\*\*\*\*

مث١٠-ال : إذا كانت ص = ع² + ع° +  $\frac{١}{ع}$  ، ع = ٣س + ١ أوجد  $\frac{وص}{وس}$

الحل

$$\therefore ص = ع° + ع² - ع + \frac{١}{ع} = (٣س + ١)² + (٣س + ١)° - (٣س + ١) + \frac{١}{٣س + ١}$$

$$\therefore \frac{وص}{وس} = ١٠(٣س + ١)⁴ - ٣ \times ٥(٣س + ١)² - \frac{١٥}{(٣س + ١)²}$$

$$\therefore \frac{وص}{وس} = ٣٠(٣س + ١)⁴ - \frac{١٥}{(٣س + ١)²}$$

\*\*\*\*\*

مث١١-ال : إذا كانت د(س) = (ع - ٥)° ، ع = ٢س + ٧ أوجد : د/ (١)

الحل

$$\therefore د(س) = (٢س + ٧)° - ٥ = (٢س + ٧)° - ٥$$

$$\therefore د/ (س) = ٥(٢س + ٧)⁴ \times ٢$$

$$\therefore د/ (س) = ١٠(٢س + ٧)⁴ \therefore د/ (١) = ١٠ \times ١(٢ + ٧)⁴ = ٨١٠$$

\*\*\*\*\*

مث١٢-ال : إذا كانت ص =  $\frac{١}{ع}$  ، ع = (١ + ٣س) أوجد :  $\frac{وص}{وس}$

الحل

$$\therefore ص = ع^{-١} = (١ + ٣س)^{-١}$$

$$\therefore \frac{وص}{وس} = -٤(١ + ٣س)^{-٢} \times ٣س²$$

$$\therefore \frac{وص}{وس} = -١٢س²(١ + ٣س)^{-٢} = \frac{-١٢س²}{(١ + ٣س)²}$$

مثال ٣-١ : إذا كانت  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  ،  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  ،  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  أوجد :  $\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{(\sqrt[3]{\frac{1}{3}})^3}{(\sqrt[3]{\frac{1}{3}})^3} = \frac{1}{1} = 1$$

\*\*\*\*\*

مثال ٤-١ : إذا كانت  $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  ،  $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  ،  $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  أوجد :  $\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

\*\*\*\*\*

مثال ٥-١ : إذا كانت  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  ،  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  ،  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  أوجد :  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

الحل

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

## تمارين

أولاً: اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

- (١) إذا كان  $v = (2 - 3s)^\circ$  فإن  $\frac{v}{s} = \dots\dots\dots$
- (٢) ميل المماس للمنحنى الدالة  $v = (3 - 2s)^\circ$  عند  $s = 2$  يساوى ...
- (٣) ميل المماس للمنحنى  $v = s - 1$  عند  $s = 1$  يساوى ...
- (٤) أوجد  $\frac{v}{s}$  لكل مما يأتي :-

$$\begin{aligned} (1) \quad v &= 3s^2 + 2s \quad ; \quad \frac{v}{s} = 3s + 2 \\ (2) \quad v &= 3s^2 - 1 \quad ; \quad \frac{v}{s} = 3s - \frac{1}{s} \\ (3) \quad v &= 3s^2 + 1 \quad ; \quad \frac{v}{s} = 3s + \frac{1}{s} \\ (4) \quad v &= 3s^2 - 1 \quad ; \quad \frac{v}{s} = 3s - \frac{1}{s} \\ (5) \quad v &= (3s^2 + 4s)^\circ \quad ; \quad \frac{v}{s} = 3s + 4 \\ (6) \quad v &= \frac{3}{(s^2 + 4s)} \quad ; \quad \frac{v}{s} = \frac{3}{s(s^2 + 4s)} \end{aligned}$$

٢ - أوجد كلاً من :

$$(1) \quad \frac{v}{s} \quad (2) \quad \frac{v}{s} \quad (3) \quad \frac{v}{s} \quad (4) \quad \frac{v}{s}$$

٣ - أجب عما يأتي :-

$$(1) \quad \text{إذا كانت } v = 9 + s \quad ; \quad \frac{v}{s} = \dots\dots\dots$$

$$(2) \quad \text{إذا كانت } v = 7 + 2s \quad ; \quad \frac{v}{s} = \dots\dots\dots$$

(٤) أوجد النقط الواقعة على المنحنى :  $v = (1 + s)^\circ$  و  $v = (1 - s)^\circ$  والتي يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات

(٥) أوجد معادلة المماس للمنحنى :  $v = s^2 + 5$  عند النقطة (٣ ، ٤)



### قاعدة:

$$[ (د_1 (س) \pm د_2 (س) \pm ..... \pm د_n (س) ] د_1 (س) \pm ..... \pm د_n (س) =$$

مثال:  $[ (3س^2 + 4س - 5) ] = 3س^2 + 4س - 5 + ث$

$$= 3س^2 + 4س - 5 + ث$$

مثال:  $[ (س^2 + 1) ] = س^2 + 1 + ث$

$$= س^2 + 1 + ث$$

مثال:  $[ (س - 5) ] = س - 5 + ث$

$$= س - 5 + ث$$

مثال:  $[ (س^2 - 4س - 5) ] = س^2 - 4س - 5 + ث$

$$= س^2 - 4س - 5 + ث$$

مثال:  $[ (س^2 - 1) ] = س^2 - 1 + ث$

$$= س^2 - 1 + ث$$

\*\*\*\*\*

**نظرية:** إذا كان:  $م$ ،  $ب$  ثابتين،  $ن \neq 1$  فإن:

$$[ (م + ب) ] = م + ب + ث$$

مثال:  $[ (3س^2 + 2س) ] = 3س^2 + 2س + ث$

أعداد  $م$  / عادل إدوار

(٣٠)

منذى توجيه الرياضيات





## الإحتمال

**التجربة العشوائية :**

هي تجربة نستطيع معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها ، ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذي سيحدث فعلاً

**فضاء العينة :**

هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية و عدد عناصرها هو  $n$  ( ف )

**أمثلة على فضاء العينة :**

(١) تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة و ملاحظة الوجه الظاهر :

**حيث :  $n$  ( ف ) = ٢**  $\{ ص ، ل \} = ف$

(٢) تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين " قطعتى نقود متميزتين مرة واحدة "

و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات :

$\{ ( ص ، ص ) ، ( ص ، ل ) ، ( ل ، ص ) ، ( ل ، ل ) \} = ف$

**حيث :  $n$  ( ف ) = ٤**

\*\*\*\*\*

(٣) تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية " ثلاث قطع متميزة نقود مرة واحدة "

و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات :

$\{ ( ص ، ص ، ص ) ، ( ص ، ص ، ل ) ، ( ص ، ل ، ص ) ، ( ص ، ل ، ل ) ، ( ل ، ص ، ص ) ، ( ل ، ص ، ل ) ، ( ل ، ل ، ص ) ، ( ل ، ل ، ل ) \} = ف$

$\{ ( ص ، ص ، ص ) ، ( ص ، ص ، ل ) ، ( ص ، ل ، ص ) ، ( ص ، ل ، ل ) ، ( ل ، ص ، ص ) ، ( ل ، ص ، ل ) ، ( ل ، ل ، ص ) ، ( ل ، ل ، ل ) \}$

**حيث :  $n$  ( ف ) = ٨**

\*\*\*\*\*

(٤) تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى :

**حيث :  $n$  ( ف ) = ٦**  $\{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ \} = ف$

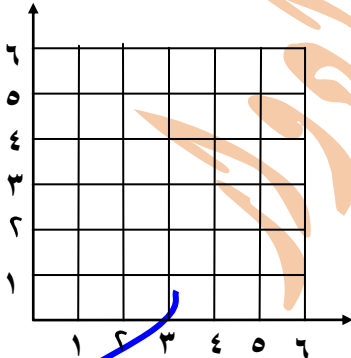
\*\*\*\*\*

(٥) تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين " حجرى نرد متميزين "

مرة واحدة " وملاحظة الأعداد الظاهرة على الوجه العلوى :

$\{ ( ١ ، ١ ) ، ( ١ ، ٢ ) ، ( ٢ ، ١ ) ، ( ٢ ، ٢ ) ، ( ٢ ، ٣ ) ، ( ٣ ، ٢ ) ، ( ٣ ، ٣ ) ، ( ٣ ، ٤ ) ، ( ٤ ، ٣ ) ، ( ٤ ، ٤ ) ، ( ٤ ، ٥ ) ، ( ٥ ، ٤ ) ، ( ٥ ، ٥ ) \} = ف$

**حيث :  $n$  ( ف ) = ٣٦**



**الحدث :** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة

فإذا كان :  $P$  حدث في  $F$  فإن :  $P \subset F$

و عدد عناصره هو :  $n(P)$  أى عدد فرص وقوع الحدث  $P$

**فمثلاً :** إذا كان  $P$  هو حدث ظهور رقم زوجي عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوي فإن :  $P = \{2, 4, 6\}$

**لاحظ أن :**  $P = \{2, 4, 6\} \subset F$

\* **الحدث المستحيل** " $\emptyset$ " = : هو الحدث الذى لا يمكن وقوعه

\* **الحدث المؤكد :** هو الحدث الذى له كل النواتج الممكنة

\* **الحدث البسيط :** هو حدث يتكون من عنصر واحد و يسمى حدث أولى

\* **الحدث المركب :** هو حدث يتكون من أكثر من عنصر و يسمى حدث غير بسيط

\* **الحدثان المتنافيان :** هما حدثان لا يمكن وقوعهما معاً أى أن هما حدثان تقاطعهما  $\emptyset$  **ملاحظة :**

الأحداث البسيطة فى فضاء العينة تكون متنافية مثنى مثنى

\*\*\*\*\*

**مثال ١:** تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين "قطعتى نقود متميزتين مرة واحدة" و ملاحظة تتابع ظهور الصور و الكتابات : أكتب الأحداث الآتية مبيناً عدد عناصره :  
(أ) ظهور صورة على الأقل (ب) ظهور صورة (ج) ظهور صورة على الأكثر

**الحل**

$$F = \{(ص، ص)، (ص، ل)، (ل، ص)، (ل، ل)\} \quad n(F) = 4$$

$$(أ) \quad \{(ص، ص)، (ص، ل)، (ل، ص)\} \quad n(أ) = 3$$

$$(ب) \quad \{(ص، ل)، (ل، ص)\} \quad n(ب) = 2$$

$$(ج) \quad \{(ل، ل)، (ل، ص)، (ص، ل)\} \quad n(ج) = 3$$

\*\*\*\*\*

**مثال ٢:** فى تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العد الظاهر على الوجه العلوى أكتب كلاً من الأحداث الآتية مبيناً نوع كل حدث :

**الحل**

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad n(F) = 6$$

$$(١) \quad P \text{ حدث ظهور عدد أكبر من } 6 = \emptyset$$

$$(٢) \quad B \text{ حدث ظهور عدد يقبل القسمة على } 5 = \{5\}$$

$$n(F) = 6$$

حدث مستحيل

حدث بسيط

- (٣) ح حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ = { ٣ ، ٦ } حدث مركب  
 (٤) د حدث ظهور عدد أكبر من أو يساوي ١ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } مؤكد  
 (٥) هـ حدث ظهور عدد زوجي = { ٢ ، ٤ ، ٦ } حدث مركب  
 (٦) و حدث ظهور عدد فردي = { ١ ، ٣ ، ٥ } حدث مركب  
 نلاحظ أن رغم أن  $P(A) = P(B) = 3$  إلا أنهما حدثان متنافيان

\*\*\*\*\*

#### مسلمات الإحتمال :

إذا كان :  $P$  حدثاً من أحداث فضاء العينة لتجربة عشوائية ما أي  $P \subset F$   
 فإن : إحتمال الحدث  $P$  "  $P$  " هو عدد حقيقي يحقق ما يأتي :

$$0 \leq P(P) \leq 1 \quad \text{حيث :} \quad P(P) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } P}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \frac{P(P)}{P(F)}$$

حيث :  $0 \leq P(P) \leq 1$  أي :  $P(P) \in [0, 1]$

أي أن : إحتمال وقوع أي حدث هو عدد حقيقي موجب لا يزيد عن الواحد الصحيح

(٢)  $P(F) = 1$  أي أن : إحتمال الحث المؤكد = ١

(٣)  $P(\emptyset) = 0$  أي أن : إحتمال الحدث المستحيل = صفر

(٤) إذا كان :  $P, B$  حدثين متنافيين من فضاء عينة فإن :

$$P(P \cap B) = 0$$

$$P(P \cup B) = P(P) + P(B)$$

(٥) إذا كان :  $F = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$  فإن :

$$1 = P(P_1) + P(P_2) + P(P_3) + \dots + P(P_n)$$

(٦) إذا كان :  $P, B$  حدثين من فضاء عينة ،  $P \subset B$  فإن :

$$P(P) = P(P \cap B)$$

$$P(P) = P(P \cup B)$$

\*\*\*\*\*

مثال ٣- في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة و ملاحظة العد الظاهر على الوجه العلوي أوجد إحتمال كلاً من الأحداث الآتية :

#### الحل

$$P(F) = 6$$

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

أعداد ١/٢ عادل إدوار

- (أ) حدث ظهور عدد أكبر من ٤ = { ٥ ، ٦ } د  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = (أ)$
- (ب) حدث ظهور عدد أقل من ٤ = { ١ ، ٢ ، ٣ } د  $\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = (ب)$
- (ج) حدث ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ = { ٣ ، ٦ } د  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = (ج)$
- (د) حدث ظهور عدد أكبر من أو يساوي ٣ = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } د  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = (د)$
- (هـ) حدث ظهور عدد أولى = { ٢ ، ٣ ، ٥ } د  $\frac{1}{6} = \frac{3}{6} = (هـ)$

\*\*\*\*\*

مثـ٤ـال: صندوق يحتوي علي ٤ كرات بيضاء ، ٩ كرات سوداء ، ٧ كرات حمراء  
أختيرت كرة عشوائيا منه أوجد إحتمال أن تكون الكرة المختارة :

أ - بيضاء ب - ليست حمراء ج - سوداء أو حمراء

الحل

- (أ) كرات بيضاء = ٤ د  $\frac{1}{6} = \frac{4}{6} = (أ)$
- (ب) كرات ليست حمراء = ٢٠ - ٧ = ١٣ د  $\frac{13}{60} = (ب)$
- (ج) كرات سوداء أو حمراء = ٩ + ٧ = ١٦ د  $\frac{4}{6} = \frac{16}{60} = (ج)$

\*\*\*\*\*

مثـ٥ـال: ألقيت قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين أوجد إحتمال الحصول على :

أ - صورة واحدة فقط ب - كتابة واحدة على الأكثر

الحل

- ف = { (ص ، ص) ، (ص ، ل) ، (ل ، ص) ، (ل ، ل) } د  $\frac{1}{4} = \frac{2}{4} = (أ)$
- (أ) صورة واحدة فقط = { (ل ، ص) ، (ص ، ل) } د  $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = (أ)$
- (ب) كتابة واحدة على الأكثر = { (ل ، ل) ، (ل ، ص) ، (ص ، ل) } د  $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = (ب)$
- (ج) د  $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = (ج)$

\*\*\*\*\*

مثـ٦ـال: من بين ١٠ بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠ سحبت بطاقة عشوائيا أوجد إحتمال

(أ) أن يكون العدد زوجيا (ب) أن يكون العدد مربع كامل

الحل

- ف = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } د  $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = (أ)$
- (أ) العدد زوجيا = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } د  $\frac{5}{10} = \frac{1}{2} = (أ)$
- (ب) العدد مربع كامل = { ١ ، ٤ ، ٩ } د  $\frac{3}{10} = \frac{3}{10} = (ب)$

أعداد ١/٢ عادل إدوار

( ٣٥ )

منذى توجيه الرياضيات

## العمليات على الأحداث .

الصورة اللفظية	الصورة الرمزية
إحتمال وقوع الحدث $P$ أو الحدث $B$ إحتمال وقوع كلا الحدثين إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل	$P \cup B = P + B - (P \cap B)$
إحتمال وقوع $P$ و $B$ إحتمال وقوعهما معا	$P \cap B = P + B - (P \cup B)$
إحتمال عدم وقوع $P$	$P' = 1 - P$
إحتمال وقوع $P$ فقط إحتمال وقوع $P$ و عدم وقوع $B$	$P - B = P \cap B'$ $P \cap B' = P - (P \cap B)$
إحتمال وقوع $B$ فقط إحتمال وقوع $B$ و عدم وقوع $P$	$B - P = B \cap P'$ $B \cap P' = B - (B \cap P)$
إحتمال عدم وقوع $B$ فقط إحتمال وقوع $P$ أو عدم وقوع $B$	$P \cup B' = 1 - (B - P)$ $P \cup B' = 1 - (B - P)$
إحتمال عدم وقوع $P$ فقط إحتمال وقوع $B$ أو عدم وقوع $P$	$B \cup P' = 1 - (P - B)$ $B \cup P' = 1 - (P - B)$
إحتمال وقوع حدث واحد على الأكثر إحتمال عدم وقوع $P$ و $B$ معا	$P \cup B' = 1 - (P \cap B)$ $B \cup P' = 1 - (P \cap B)$
إحتمال عدم وقوع أحدهما على الأقل إحتمال عدم وقوع $P$ أو $B$	$P' \cap B' = 1 - (P \cup B)$ $P' \cap B' = 1 - (P \cup B)$
إحتمال وقوع أحدهما فقط إحتمال وقوع $P$ أو $B$ فقط إحتمال وقوع أحدهما دون الآخر	$[P - B] \cup [B - P]$ $P \cup B - (P \cap B) = P + B - (P \cap B)$

مثال ١: إذا كان  $P$  ،  $B$  حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما و كان :

$$P = 0.43, B = 0.68, P \cap B = 0.3$$

أوجد :  $P - B$  ،  $P \cup B$  ،  $P - B$

**الحل**

$$P - B = 0.43 - 0.3 = 0.13$$

$$P \cup B = 0.43 + 0.68 - 0.3 = 0.81$$

$$P - B = 0.13$$

$$P - B = 0.13$$

$$P - B = 0.13$$

\*\*\*\*\*

مثال ٢: إذا كان  $P$  ،  $B$  حدثين من ف ،  $P = \frac{1}{4}$  ،  $B = \frac{3}{8}$  ،  $P \cap B = \frac{1}{8}$

أوجد :  $P - B$  ،  $P \cup B$  ،  $P - B$

**الحل**

$$P - B = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$P \cup B = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{8} - \frac{5}{8} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = (P \cap B) - P = (B - P)$$

\*\*\*\*\*

مثال ٣: إذا كان  $P$  ،  $B$  حدثين من ف ،  $P = 0.7$  ،  $B = 0.4$  ،  $P \cap B = 0.3$

أوجد :  $P \cap B$  ،  $P - B$

**الحل**

$$P \cap B = 0.7 - 0.3 = 0.4$$

$$P \cap B = 0.4$$

$$0.2 = [0.3 - 0.4 + 0.7] - 1 =$$

$$P - B = 0.3 - 0.4 = -0.1$$

$$P - B = 0.3 - 0.4 = -0.1$$

مثال: إذا كان  $P$  ، ب حدثين من ف ،  $\frac{5}{8} = P$  ،  $\frac{2}{3} = (P \cup B)$  ،  $\frac{3}{4} = (P \cap B)$  أوجد (١)  $(P \cap B)$  (٢)  $(P - B)$  (٣)  $(P \cap B')$

**الحل**

$$\therefore (P) - 1 = (P') \quad \therefore (P) - 1 = (P') \quad \therefore \frac{3}{4} = \frac{5}{8} - 1 = (P') \quad \therefore \frac{3}{4} = \frac{5}{8} - 1 = (P')$$

$$(1) (P \cap B) = (P) - (P - B) = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

$$(2) (P - B) = (P) - (P \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

$$(3) (P \cap B') = (P) - (P \cap B) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

\*\*\*\*\*

مثال: إذا كان  $P$  ، ب حدثين من ف ،  $\frac{3}{5} = P$  ،  $\frac{1}{4} = (P \cap B')$  أوجد (١)  $(P \cap B)$  (٢)  $P \supset B$

**الحل**

$$(1) \therefore P \text{ ، ب متنافيان } \therefore (P \cap B) = \text{صفر}$$

$$\therefore (P \cap B') = (P) - (P \cap B) = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}$$

$$(2) \therefore P \supset B \quad \therefore (P \cap B) = (P) = \frac{3}{5}$$

$$(2) \therefore P \supset B \quad \therefore (P \cap B) = (P) = \frac{3}{5}$$

\*\*\*\*\*

مثال: إذا كان  $P$  ، ب حدثين من ف ،  $\frac{5}{8} = P$  ،  $\frac{7}{8} = (P \cup B)$  ،  $\frac{3}{8} = (P \cap B)$  أوجد احتمال (!) وقوع حدث واحد على الأقل (!! عدم وقوع الحدثين  $P$  ، ب معا

**الحل**

$$(!) \text{ وقوع حدث واحد على الأقل } = (P \cup B) = \frac{7}{8}$$

$$(P \cup B) = \frac{7}{8} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$(!) \text{ عدم وقوع الحدثين } P \text{ ، ب معا } = (P \cap B)' = 1 - (P \cap B) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore (P \cap B)' = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$



مثال: إذا كان  $P$  ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة بحيث  $3 \text{ ل } (P) = 4 \text{ ل } (ب)$  ،  
 $ل(P \cup ب) = ٠,٦٣$  ، أوجد  $ل(P)$  ،  $ل(ب)$  ،  $ل(P)$

### الحل

$\therefore P$  ، ب متنافيان  $\therefore ل(P \cap ب) = \text{صفر}$

$\therefore ل(P \cup ب) = ل(P) + ل(ب) = ٠,٦٣$

$ل(P) = ٠,٦٣ - ل(ب) = ٠,٦٣ - ٠,٣٦ = ٠,٢٧$

$\therefore ل(P) = ٠,٢٧$  ،  $ل(ب) = ٠,٣٦$

$\therefore ل(P) = ٠,٢٧$  ،  $ل(ب) = ٠,٣٦$

\*\*\*\*\*

### تمارين

أولاً: اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاه

(١) يقال أن الحدثين  $P$  ، ب متنافيان إذا كان  $ل(P \cap ب) = \dots\dots\dots$

Ⓐ صفر Ⓑ ١ Ⓒ  $\frac{1}{3}$  Ⓓ  $\frac{1}{4}$

(٢) يقال أن الحدثين  $P$  ، ب متنافيان إذا كان  $ل(P \cap ب) = \dots\dots\dots$

Ⓐ صفر Ⓑ ١ Ⓒ  $\frac{1}{3}$  Ⓓ  $\frac{1}{4}$

(٣) إذا كان  $P \supset ب$  فإن  $ل(P \cup ب) = \dots\dots\dots$

Ⓐ  $ل(P)$  Ⓑ  $ل(ب)$  Ⓒ  $ل(P \cap ب)$  Ⓓ ١

ثانياً: أجب عن الأسئلة الآتية

١ - أُلقيت قطعة نقود منتظمة ثلاث مرات متتالية أوجد احتمال ظهور :

$P$  - صورة واحدة أو صورتين ب - صورة واحدة على الأقل

٢ - إذا كان أحد الأندية يلعب ٣٠ مباراة في الدوري وكان احتمال تعادله في عدد من

المباريات هو ٠.٣ وإحتمال فوزه في عدد من المباريات هو ٠.٥ أوجد عدد المباريات

التي يخسرها هذا النادي في الدوري

٣ - كيس يحتوى على ٨ كرات بيضاء مرقمة من ١ إلى ٨ ، ٦ كرات حمراء مرقمة من ٩

إلى ١٤ سحبت كرة عشوائياً منه أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة

$P$  - تحمل عدداً أولياً ب - تحمل عدداً مربعاً



٤ - سحبت بطاقة من بين ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٣٠ اوجد احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددا : \* زوجيا ويقبل القسمة على ٥ \*\* يقبل القسمة على ٣ ، ٥

٥ - صندوق به ٨ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٨ سحبت بطاقتان واحدة بعد الأخرى مع الإحلال اوجد احتمال أن يكون : ٢ - الفرق المطلق بين العددين ٣  
ب - مجموع العددين أقل من ٨

٦ - ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة اوجد احتمال :

(٢) الحصول على عددين مختلفين (ب) مجموع العددين أكبر من ٧  
(ج) مجموع العددين الظاهرين أقل من ٨ (د) الفرق المطلق لعددين عددا أوليا  
٧ - من مجموعة الأرقام { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } كون عدد من رقمين مختلفين و اوجد

احتمال الحصول على ٢ - رقم العشرات فردى ب - رقم الآحاد أولى  
ج - رقم العشرات فردى أو رقم الآحاد أولى

٨ - إذا كان أ، ب حدثين من ف،  $P(A) = \frac{3}{4}$  ،  $P(B) = \frac{2}{3}$  ،  $P(A - B) = \frac{1}{8}$   
أوجد  $P(A \cup B)$  ؛  $P(A \cap B)$

٩ - إذا كان م ، ب حدثين من ف،  $P(A \cup B) = 0.74$  ،  $P(B) = 0.65$  ،  
 $P(A \cap B) = 0.25$  أوجد  $P(A)$  ؛  $P(A \cap B)$

١٠ - إذا كان م ، ب حدثين من ف،  $P(A \cup B) = 0.45$  ،  $P(B - A) = 0.15$  ،  
 $P(A \cap B) = 0.3$  أوجد :  $P(A)$  ؛  $P(B)$  ؛  $P(A \cap B)$

١١ - إذا كان م ، ب حدثين متنافيين من ف ،  $P(A) = 0.27$  ،  $P(B) = 0.35$  ،  
أوجد :  $P(A \cap B)$  ،  $P(A \cap B)$

١٢ - إذا كان م ، ب حدثين متنافيين من ف ،  $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$  ،  $P(B - A) = \frac{1}{4}$  أوجد  
 $P(A)$  ؛  $P(B)$  ؛  $P(A \cup B)$

١٣ - إذا كان م ، ب حدثين من ف ،  $P(A) = \frac{1}{4}$  ؛  $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$  أوجد  $P(B)$   
إذا كان : (!) م ، ب حدثين متنافيين

١٤ - يصوب لاعبان م ، ب فى وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب م الهدف هو  $\frac{2}{5}$  ، احتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف هو  $\frac{1}{4}$  ، احتمال أن يصيب اللاعبان الهدف معا هو  $\frac{1}{4}$  أوجد

\* احتمال إصابة الهدف \* احتمال إصابة الهدف من اللاعب م فقط