مذكرة الهندسة التحليلية

الصف الأول الثانوى

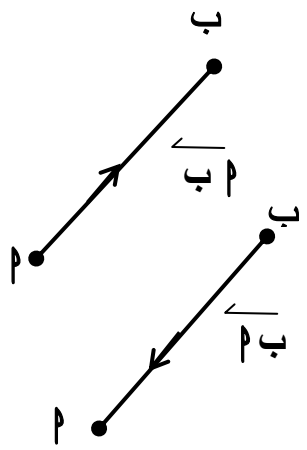
الفصل الدراسى الثانى

٢٠١٩/٢٠٢٠

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار

المتجـــــــــهات

تعريف (١) القطعة المستقيمة الموجهة ($\overleftarrow{\text{أ ب}}$)



هى قطعة مستقيمة بدايتها النقطة أ ونهايتها النقطة ب

القطعة المستقيمة الموجهة تتحدد بثلاث عناصر هى

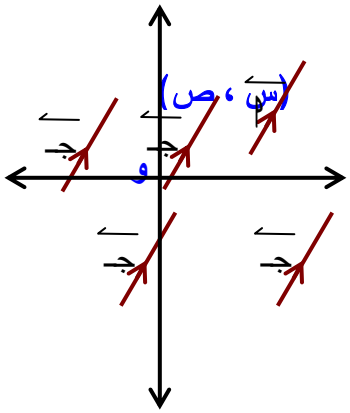
(١) نقطة البداية (٢) نقطة النهاية

(٣) الاتجاه من نقطة البداية إلى ننقطة النهاية

ملاحظات : -

$\overline{\text{أ ب}} = \overline{\text{ب أ}}$ بينما $\overleftarrow{\text{أ ب}} \neq \overleftarrow{\text{ب أ}}$ لاختلافهما فى نقطتى البداية ونقطتى النهاية

تعريف (٢) متجهة الموضع :

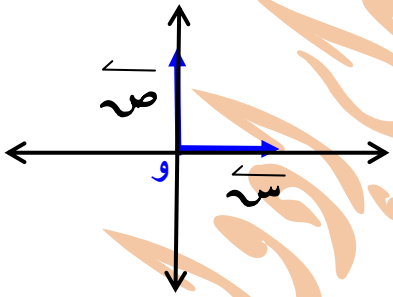


(١) القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{\text{و أ}}$ تسمى متجة الموضع للنقطة أ (س ، ص)

(٢) متجة الموضع $\overleftarrow{\text{و أ}}$ يقال أنه تمثيل هندسى للمتجة $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (س ، ص)

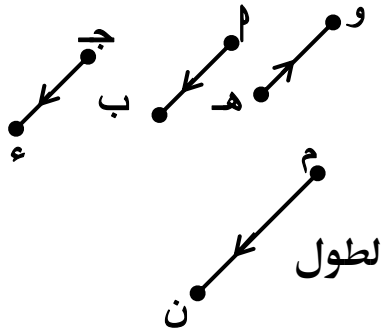
كل متجه $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (س ، ص) $\in$ ح^{٢} يمكن تمثيله هتدسياً بالعديد من القطع المستقيمة الموجة المتكافئة والتى كل منها تكافئ متجة الموضع للنقطة أ = (س ، ص)

تعريف (٣) متجهى الوحده الأساسيين :



(١) متجه الوحدة الأساسى س هو القطعة المستقيمة الموجة ا لتى مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الأتجاه الموجب لمحور السينات أى أ ن $\overleftarrow{\text{س}}$ = (١ , ٠)

(٢) متجه الوحدة الأساسى ص هو القطعة المستقيمة الموجة التى مبدؤها نقطة الأصل ومعيارها الوحدة واتجاهها هو الأتجاه الموجب لمحور الصادا ت أى أ ن $\overleftarrow{\text{ص}}$ = (٠ , ١)



تعريف (٤) تكافؤ قطعتين مستقيمين موجهتين

يقال لقطعتين مستقيمتين موجهتين أنهما متكافئتان إذا كانتا

(١) لهما نفس الطول (٢) لهما نفس الاتجاه

فمثلا: $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ تكافئ $\overleftarrow{\text{جـ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ لا تكافئ $\overleftarrow{\text{م ن}}$ لاختلاف الطول

، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ لا تكافئ $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ لاختلاف الاتجاه

تعريف (٥) جمع متجهين:-

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = (\text{س}_1 + \text{س}_2 ، \text{ص}_1 + \text{ص}_2)$

فمثلاً :

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = (٢ ، -٣)$ ، $\overleftarrow{\text{ب}} = (١ ، ٥)$

فإن : $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = (٢ + ١ ، -٣ + ٥) = (٣ ، ٢)$

خواص جمع المتجهات :

(١) خاصية الإبدال : $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}} = \overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{أ}}$

(٢) خاصية الدمج (التجميع) : $\overleftarrow{\text{أ}} + (\overleftarrow{\text{ب}} + \overleftarrow{\text{جـ}}) = (\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{ب}}) + \overleftarrow{\text{جـ}}$

(٣) المتجه الصفرى : $\overleftarrow{\text{و}} = (٠ ، ٠)$ ويكون $\overleftarrow{\text{أ}} + \overleftarrow{\text{و}} = \overleftarrow{\text{و}} + \overleftarrow{\text{أ}} = \overleftarrow{\text{أ}}$

(٤) المعكوس الجمعى : إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{س} ، \text{ص})$ فإن $(-\overleftarrow{\text{أ}}) = (-\text{س} ، -\text{ص})$

تعريف (٦) ضرب المتجه فى عدد حقيقى :

إذا كان : $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{س} ، \text{ص})$ ، $\text{ك} \in \text{ح}$

فإن : $\text{ك}\ \overleftarrow{\text{أ}} = \text{ك}(\text{س} ، \text{ص}) = (\text{ك س} ، \text{ك ص})$

فمثلاً : $\overleftarrow{\text{أ}} = (-٣ ، ٥)$ فإن : $٢\overleftarrow{\text{أ}} = ٢(-٣ ، ٥) = (٢ \times -٣ ، ٢ \times ٥) = (-٦ ، ١٠)$

ملاحظه : إذا كان : $\overleftarrow{\text{ب}} = \text{ك}\ \overleftarrow{\text{أ}}$

* وكان : ك > صفر ∴ $\overleftarrow{\text{ب}} // \overleftarrow{\text{أ}}$ ولهما نفس الاتجاه

* وكان : ك < صفر ∴ $\overleftarrow{\text{أ}} // \overleftarrow{\text{ب}}$ ولهما اتجاهين متضادين

مثـ١ـــال : إذا كان : $\overleftarrow{أ}$ = (-٣ ، ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٤ ، ٠) أوجد $\overleftarrow{جـ}$ = ٢ $\overleftarrow{أ}$ + ٤ $\overleftarrow{ب}$

الحـــــــل

$\overleftarrow{جـ}$ = ٢(-٣ ، ٢) + ٤ (٤ ، ٠) = (-٦ ، ٤) + (١٦ ، ٠) = (١٠ ، ٤)

مثـ٢ـــال : إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (٣ ، -١) , $\overleftarrow{ب}$ = (٠ , ٢) , $\overleftarrow{جـ}$ = (١ , ١) فأوجد $\overleftarrow{أ}$ + ٣$\overleftarrow{ب}$ - ٢ $\overleftarrow{جـ}$

الحـــــــل

$\overleftarrow{أ}$ + ٣$\overleftarrow{ب}$ - ٢ $\overleftarrow{جـ}$ = (٣ , -١) + ٣ (٠ , ٢) - ٢ (١ , ١)

= (٣ ، -١) + (٠ ، ٦) - (٢ ، ٢)

= (٣ + ٠ - ٢ ، -١ + ٦ - ٢) = (١ ، ٣)

مثـ٣ـــال : أوجد العددين ك , ن إذا كان (ك , ٢) + (٤ , ن) = (١ , ١)

الحـــــــل :

(ك , ٢) + (٤ , ن) = (ك + ٤ ، ٢ + ن) = (١ , ١)

تساوى متجهين ∴ ك + ٤ = ١ ⟸ ك = -٣ ، ٢ + ن = ١ ⟸ ن = -١

مثـ٤ـــال : إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (-٣ , ٤) , $\overleftarrow{ب}$ = (١ , ٠) , $\overleftarrow{جـ}$ = (س , ص) فأوجد العددين س , ص بحيث يكون $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{ب}$ - ٢ $\overleftarrow{جـ}$

الحـــــــل :

∵ $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{ب}$ - ٢ $\overleftarrow{جـ}$ ∴ (-٣ , ٤) = (١ , ٠) - ٢ (س , ص)

(-٣ ، ٤) = (١ ، ٠) - (٢ س ، ٢ص) = (١ - ٢ س ، ٠ - ٢ ص)

∴ -٣ = ١ - ٢س ⟸ ٢س = ١ + ٣ = ٤ ⟸ س = ٢

، ٤ = - ٢ ص ⟸ ص = -٢

مثـــال : إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، ٢) , $\overrightarrow{ب}$ = (٦ ، ٤) , $\overrightarrow{جـ}$ = (٣ ، −٢)

فعبر عن $\overrightarrow{ب}$ بدلالة $\overrightarrow{أ}$, $\overrightarrow{جـ}$

الحـــــــل

نفرض أن $\overrightarrow{ب}$ = ك $\overrightarrow{أ}$ + ن $\overrightarrow{حـ}$

∴ (٦ ، ٤) = ك (١ ، ٢) + ن (٣ ، −٢)

(٦ ، ٤) = (ك ، ٢ ك) + (٣ ن ، −٢ ن) = (ك + ٣ ن ، ٢ ك − ٢ ن)

∴ ك + ٣ ن = ٦ (١) ، ٢ ك − ٢ ن = ٤ (٢)

بحل المعادلتين (١) × −٢ −٢ ك − ٦ ن = −١٢

جمع (٢) صفر − ٨ ن = −٨ ∴ ن = ١

بالتعويض فى الاولى ٢ ك − ٢ = ٤ ∴ ك = ٣ ∴ $\overrightarrow{ب}$ = ٣ $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{جـ}$

تمارين على جمع المتجهات وضرب المتجهات فى عدد حقيقى

(١) اذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢ , −١) , $\overrightarrow{ب}$ (٣ , ٤) فأوجد ٢ $\overrightarrow{أ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$, ٢ $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$

(٢) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢ , ٥) , $\overrightarrow{ب}$ = (−٣ , −١) , $\overrightarrow{جـ}$ = (−٢ , ٠) فأوجد ٢ $\overrightarrow{ب}$ − (٣ $\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{جـ}$)

(٣) أوجد العددين ك , ن إذا كان (أولا) (ك , ٢) + (٤ , ن) = (١ , ١)

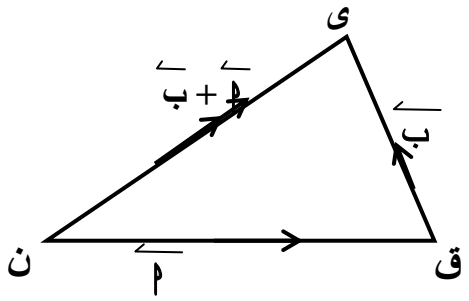
(ثانيا) ك (−٢ , ن) = (−٤ , ٦) (ثالثا) (٢ , ٩) = ك (٢ , ٣) + ن (−٢ , ٥)

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٥ , −٢) , $\overrightarrow{ب}$ = (٣ , −٣) , $\overrightarrow{حـ}$ = (−١ , ٤) فعبر عن $\overrightarrow{أ}$ بدلالة $\overrightarrow{ب}$, $\overrightarrow{جـ}$

(٥) إ ذا كانت $\overrightarrow{أ}$ = (١ , −٢) , $\overrightarrow{ب}$ = (٣ , ٦) , $\overrightarrow{جـ}$ = (−٢ , −٥) , $\overrightarrow{د}$ = (−١ , −١)

فأوجد ن بحيث : $\overrightarrow{أن}$ = $\overrightarrow{أجـ}$ − $\overrightarrow{بد}$

جمع المتجهات هندسيا :

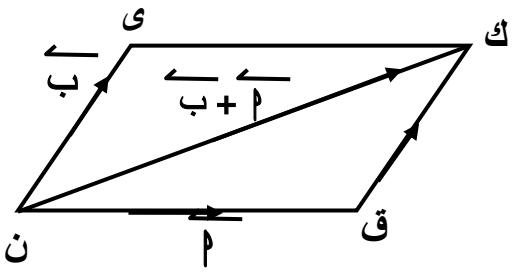


(١) قاعدة المثلث

إذا كان : $\overrightarrow{نق}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{قى}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{ب}$

فأن : $\overrightarrow{نى}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{نق} + \overrightarrow{قى}$

أى أن : $\overrightarrow{نق} + \overrightarrow{قى} = \overrightarrow{نى}$ الضلع الثالث للمثلث



(٢) قاعدة متوازى الأضلاع :

إذا كان : $\overrightarrow{نق}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{نى}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{ب}$

فأن : $\overrightarrow{نك}$ تمثل المتجه $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}$

أى أن : $\overrightarrow{نق} + \overrightarrow{قى} = \overrightarrow{نك}$

يمثل قطر متوازى الاضلاع الذى له نفس نقطة البداية أو نفس نقطة النهاية

ملاحظات :

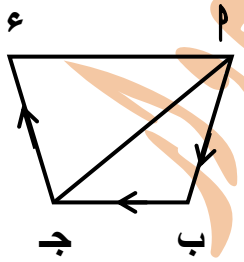
[١] فى أى مثلث أ ب جـ يكون : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـأ} = \overrightarrow{و}$

[٢] إذا كان $\overline{أء}$ متوسط فى Δ أ ب جـ فإن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أجـ} = ٢ \overrightarrow{أء}$

الفرق بين متجهين هندسياً

حيث أن : $\overrightarrow{وأ} + \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{وب}$ فإن : $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{وب} - \overrightarrow{وأ} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$

مثـال : فى الشكل الرباعى: أب جـ ء أثبت أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـء} = \overrightarrow{أء}$



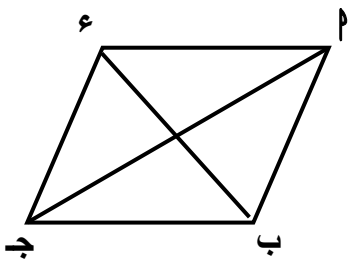
الحـــــــل

Δ أ ب جـ فيه $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{أجـ}$

الأيمن $(\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ}) + \overrightarrow{جـء} = \overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{جـء} = \overrightarrow{أء}$ الأيسر

مثـ٢ـال : فى متوازى الأضلاع أ ب جـ ء أثبت أن

$\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بء} = ٢\overrightarrow{بجـ}$



الحـــــل

∵ $\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ}$ ، $\overrightarrow{بء} = \overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{أء}$

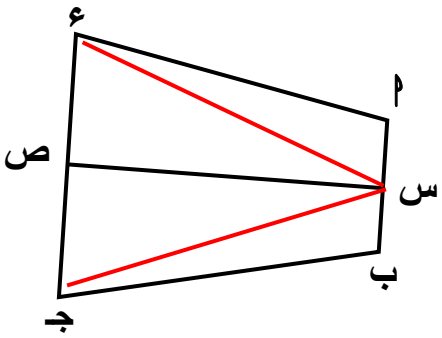
∴ $\overrightarrow{أجـ} + \overrightarrow{بء} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{أء}$

$= (\overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{أء}) + (\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بأ})$ ، ∵ $\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{أء}$

$= \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{و} = ٢\overrightarrow{بجـ}$

مثـ٣ـال: أ ب جـ ء شكل رباعى ، س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{جـء}$

أثبت أن : $\overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{أء} = ٢\overrightarrow{سص}$



الحـــــل

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overrightarrow{أس} = \overrightarrow{سب}$

فى Δ س أ ء $\overrightarrow{سأ} + \overrightarrow{أء} = \overrightarrow{سء}$ ..... (١)

فى Δ س ب جـ $\overrightarrow{سب} + \overrightarrow{سجـ} = \overrightarrow{سجـ}$ (٢)

بجمع (١) ، (٢) ∴ $\cancel{\overrightarrow{سأ}} + \overrightarrow{أء} + \cancel{\overrightarrow{سب}} + \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{سء} + \overrightarrow{سجـ}$

∵ ص منتصف $\overline{ءجـ}$ فى Δ س ء جـ

∴ $\overrightarrow{أء} + \overrightarrow{بجـ} = ٢\overrightarrow{سص}$ وهو المطلوب

مثـ٤ـال: أ ب جـ د مستطيل تقاطع قطريه فى م , س نقطة خارجـــة . أثبت أن

$\overrightarrow{سأ} + \overrightarrow{سجـ} = \overrightarrow{سب} + \overrightarrow{سد}$

الحـــــل

∵ م نقطة تقاطع قطرى المستطيل فإن م منتصف $\overline{أجـ}$ ، $\overline{بء}$

Δ س أ جـ الأيمن $\overrightarrow{سأ} + \overrightarrow{سجـ} = ٢\overrightarrow{سم}$

Δ س ب ء الأيمن $\overrightarrow{سب} + \overrightarrow{سء} = ٢\overrightarrow{سم}$ ∴ الطرفان متساويان

مثـــال: فى أى شكل رباعى أ ب جـ د أثبت أن $\overrightarrow{\text{ءب}} - \overrightarrow{\text{جب}} = \overrightarrow{\text{ءأ}} - \overrightarrow{\text{جأ}}$

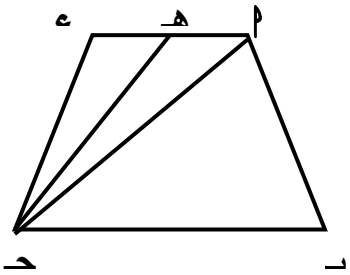
الحـــــل

الأيمن : $\overrightarrow{\text{ءب}} - \overrightarrow{\text{جب}} = \overrightarrow{\text{ءب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{ءجـ}}$

الأيسر : $\overrightarrow{\text{ءأ}} - \overrightarrow{\text{جأ}} = \overrightarrow{\text{ءأ}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{ءجـ}}$ ∴ الطرفان متساويان

مثـــال: أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{بجـ}} // \overline{\text{أء}}$, هـ منتصف $\overline{\text{أء}}$

. أثبت أن $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} = ٢\overrightarrow{\text{هـجـ}}$



الحـــــل

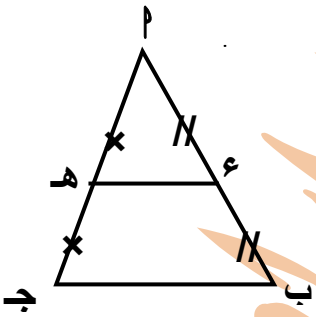
Δ أ ب جـ $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}}$

Δ جـ أ ء $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} = ٢\overrightarrow{\text{جـهـ}}$ جـ هـ متوسط

الأيمن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بجـ}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} = \overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}} = ٢\overrightarrow{\text{هـجـ}}$

∴ الطرفان متساويان

مثـــال: أثبت أن القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى المثلث توازى الضلع الثالث وطولها يساوى نصف طولها



الحـــــل

∵ ء ، هـ منتصفى أ ب ، أ جـ

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = ٢\overrightarrow{\text{أء}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}} = ٢\overrightarrow{\text{أهـ}}$

Δ أ ب جـ $\overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{بجـ}}$ (١)

Δ أ ء هـ $\overrightarrow{\text{ءأ}} + \overrightarrow{\text{أهـ}} = \overrightarrow{\text{ءهـ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) $\overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = ٢\overrightarrow{\text{ءأ}} + ٢\overrightarrow{\text{أهـ}} = ٢(\overrightarrow{\text{ءأ}} + \overrightarrow{\text{أهـ}}) = ٢\overrightarrow{\text{ءهـ}}$

∴ $\overrightarrow{\text{بجـ}} = ٢\overrightarrow{\text{ءهـ}}$ $\overline{\text{ءهـ}} // \overline{\text{بجـ}}$ ، ء هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

تمارين على التمثيل الهندسى للمتجهات

(١) أ ب جـ د شكل رباعى أثبت أن $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـد} + \overrightarrow{دأ} = \overrightarrow{و}$

حيث أن المتجة $\overrightarrow{و}$ هو المتجه الصفرى (٠,٠)

(٢) أ ب جـ مثلث فيه د منتصف ب جـ , هـ منتصف أ جـ , و منتصف أ ب

أثبت أن (١) $\overrightarrow{أو} + \overrightarrow{أهـ} = \overrightarrow{أد}$, (٢) $\overrightarrow{أو} - \overrightarrow{أهـ} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{جـب}$

(٣) أ ب جـ د شبه منحرف فيه ٣ أ د = ٢ ب جـ . أثبت أن

$٢\overrightarrow{أجـ} + ٢\overrightarrow{بد} = ٥\overrightarrow{أد}$

(٤) أب جـ د متوازى أضلاع , م نقطة فى مستوية أثبت أن $\overrightarrow{أم} + \overrightarrow{مب} = \overrightarrow{مجـ} + \overrightarrow{ءم}$

ومن ذلك أثبت أن . $\overrightarrow{مأ} + \overrightarrow{مجـ} = \overrightarrow{مب} + \overrightarrow{مد}$

(٥) أ ب جـ د شكل رباعى فيه . $٢\overrightarrow{بجـ} = ٥\overrightarrow{أد}$.أثبت أن

(!) $٢\overrightarrow{أجـ} + ٢\overrightarrow{بء} = ٧\overrightarrow{أء}$ (!!) $٢\overrightarrow{أب} - ٢\overrightarrow{ءجـ} = ٣\overrightarrow{ءأ}$

(٦) أ ب جـ مثلث . د نقطة بحيث $٤\overrightarrow{بد} = ٣\overrightarrow{دجـ}$

أثبت أن $٣\overrightarrow{أجـ} + ٤\overrightarrow{أب} = ٧\overrightarrow{أء}$

(٧) س ص ع مثلث . ل نقطة بحث ص ل = ٢ ل

أ ثبت أن $\overrightarrow{سص} + ٢\overrightarrow{سع} = ٣\overrightarrow{سل}$

(١٠) س ص ع مثلث . ل نقطة بحث ص ل = ٢ ل ع

أ ثبت أن $\overrightarrow{سص} + ٢\overrightarrow{سع} = ٣\overrightarrow{سل}$

(١١) أ ب جـ د متوازى أضلاع . م نقطة خارجة أثبت أن

{ أولا} $\overrightarrow{أم} + \overrightarrow{بم} + \overrightarrow{مء} + \overrightarrow{مجـ} = ٢\overrightarrow{أء}$

{ثانيا} $\overrightarrow{مأ} + \overrightarrow{مب} + \overrightarrow{مجـ} + \overrightarrow{مء} = ٤\overrightarrow{من}$: حيث ن نقطه تلاقى قطريه

(١٢) أ ب جـ د شكل رباعى فيه س منتصف أ ب , ص منتصف ء جـ .

أثبت أن $\overrightarrow{أء} + \overrightarrow{بجـ} = ٢\overrightarrow{سص}$

المتجهات والإحداثيات :

متجها الوحدة الاساسيان : $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$

$\overrightarrow{\text{س}}$ هو متجه موضع للنقطة (١ ، ٠) ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ هو متجه موضع للنقطة (٠ ، ١)

التعبير عن أى متجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين

المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين $\overrightarrow{\text{أ}}$ = س $\overrightarrow{\text{س}}$ + ص $\overrightarrow{\text{ص}}$

فمثلاً : $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٢ ، ٣) = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء}}$ = (٠ ، ٥) = ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$

مثـــال : إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ـ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = $\overrightarrow{\text{س}}$ − ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$

أوجد: بدلالة متجهى الوحدة : (١) ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ـ ($\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$) (٢) $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$

الحـــــل

$\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ـ٢) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٣ ، ٠) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (١ ، ـ٥)

(١) ٢ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ ـ ($\overrightarrow{\text{أ}}$ + $\overrightarrow{\text{ب}}$) = ٢ (١ ، ـ٥) ـ [(٣ ، ـ٢) + (٣ ، ٠)]

= (٢ ، ـ١٠) ـ (٦ ، ـ٢) = (ـ٤ ، ـ٨)

بدلالة متجهى الوحدة = ـ٤ $\overrightarrow{\text{س}}$ ـ ٨ $\overrightarrow{\text{ص}}$

(٢) $\overrightarrow{\text{جـ ب}}$ = $\overrightarrow{\text{ب}}$ ـ $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (٣ ، ٠) ـ (١ ، ـ٥) = (٢ ، ٥)

بدلالة متجهى الوحدة = ٢ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ٥ $\overrightarrow{\text{ص}}$

مثـــال : عبر عن كل من المتجهات الآتية بزوج مرتب من ح^2 ثم أوجد متجه الوحدة فى إتجاه كل منهما $\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٤ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٣ $\overrightarrow{\text{س}}$, $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ٨ $\overrightarrow{\text{س}}$, $\overrightarrow{\text{ء}}$ = − $\overrightarrow{\text{س}}$ ـ ٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$

الحـــــل

$\overrightarrow{\text{ب}}$ = ٤ (٠ ، ١) + ٣ (١ ، ٠) = (٠ ، ٤) + (٣ ، ٠) = (٣ ، ٤)

$\overrightarrow{\text{جـ}}$ = ٨ (١ ، ٠) = (٨ ، ٠)

$\overrightarrow{\text{ء}}$ = − (١ ، ٠) − ٢ (٠ ، ٤) = (−١ ، ٠) + (٠ ، −٢) = (−١ ، −٢)

تعريف معيار المتجه (طول المتجه)

إذا كان : $\overrightarrow{أ}$ = (س ، ص) فإن العدد الحقيقى $\sqrt{س^٢ + ص^٢}$ يسمى معيار المتجه $\overrightarrow{أ}$

متجه الوحدة $\overrightarrow{س}$ = (١ ، ٠) لأن $\|\overrightarrow{س}\| = \sqrt{١ + ٠}$ = ١ وحدة طول

$\|\overrightarrow{س}\| = \|\overrightarrow{ص}\|$ = ١ وحدة طول

مثـــال : أوجد معيار كل من المتجهات الآتية :

$\overrightarrow{أ} = ٥\overrightarrow{س} - ١٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، -٦) ، $\overrightarrow{جـ}$ = ($\sqrt{٧}$ ، ٣)

الحـــــل

$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٥^٢ + ١٢^٢} = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩}$ = ١٣ وحدة طول

$\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٣^٢ + ٦^٢} = \sqrt{٩ + ٣٦} = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$ وحدة طول

$\|\overrightarrow{جـ}\| = \sqrt{٧ + ٣^٢} = \sqrt{٧ + ٩} = \sqrt{١٦}$ = ٤ وحدة طول

مثـــال : إذا كانت $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، -٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (-٢ ، ٥) أوجد كل من

$\|٢\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + ٢\overrightarrow{جـ}\|$ ، $\|\overrightarrow{أجـ}\|$

الحـــــل

$٢\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + ٢\overrightarrow{جـ}$ = ٢ (١ ، -٢) + (٣ ، ٤) + ٢ (-٢ ، ٥)

= (٢ ، -٤) + (٣ ، ٤) + (-٤ ، ١٠) = (١ ، ١٠)

∴ $\|٢\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} + ٢\overrightarrow{جـ}\| = \sqrt{١^٢ + ١٠^٢} = \sqrt{١ + ١٠٠} = \sqrt{١٠١}$ وحدة طول

$\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ}$ = (-٢ ، ٥) - (١ ، -٢) = (-٣ ، ٧)

$\|\overrightarrow{أجـ}\| = \sqrt{(-٣)^٢ + ٧^٢} = \sqrt{٩ + ٤٩} = \sqrt{٥٨}$ وحدة طول

مثـ٣ـال : إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (ك ، ٥) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، ١) فأوجد قيمة ك التى تجعل || $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ || = ١٠

الحـــــل

$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = (ك ، ٥) + (٤ ، ١) = (ك + ٤ ، ٦)

∴ || $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ || = $\sqrt{(ك^٢ + ٨ ك + ١٦) + ٣٦}$ = ١٠ بتربيع الطرفين

∴ $ك^٢$ + ٨ ك + ١٦ + ٣٦ = ١٠٠ ⟸ $ك^٢$ + ٨ ك − ٤٨ = ٠ بالتحليل

(ك + ١٢) (ك − ٤) = ٠ ∴ ك = ٤ أ، ك = − ١٢

مثـ٤ـال : إذا كانت $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، −١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−١ ، ٢) $\overrightarrow{جـ}$ = (٤ ، ٠) أوجد إحداثى النقطة ء بحيث أ ب جـ ء متوازى أضلاع

الحـــــل

∵ أ ب جـ ء متوازى أضلاع

∴ $\overrightarrow{أ ء}$ تكافئ $\overrightarrow{ب جـ}$ فإن : $\overrightarrow{أ ء}$ = $\overrightarrow{ب جـ}$ ⟸ $\overrightarrow{ء}$ − $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{جـ}$ − $\overrightarrow{ب}$

∴ $\overrightarrow{ء}$ = $\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{جـ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، −١) + (٤ ، ٠) − (−١ ، ٢) = (٦ ، ١)

تمارين على المتجهات والأحداثيات

(١) عبر عن كل من المتجهات الآتية بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين. ثم أوجد معيار كل منهما

$\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، −٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٥ ، ١٢) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (١ ، ١) ، $\overrightarrow{د}$ = (٧ ، ٠)

(٢) عبر عن كل من المتجهات الآتية بزوج مرتب من $ع^٢$ ثم أوجد متجه الوحدة فى إتجاه كل منهما $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{س}$ + $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = ٤ $\overrightarrow{ص}$ + ٣ $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{جـ}$ = ٨ $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{د}$ = − $\overrightarrow{س}$ − ٢ $\overrightarrow{ص}$

(٣) إذا كانت $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، −٣) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (−٥ ، ٣) أوجد كل من

|| $\overrightarrow{أ ب}$ + $\overrightarrow{أ جـ}$ || ، || $\overrightarrow{أ ب}$ || ، || $\overrightarrow{جـ ب}$ − $\overrightarrow{ب أ}$ ||

(٤) إذا كانت $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، −١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−١ ، ٢) $\overrightarrow{جـ}$ = (٤ ، ٠) أوجد كل من

{ أولاً } إحداثى النقطة (د) بحيث $\overrightarrow{أ جـ}$ تكافئ $\overrightarrow{د ب}$

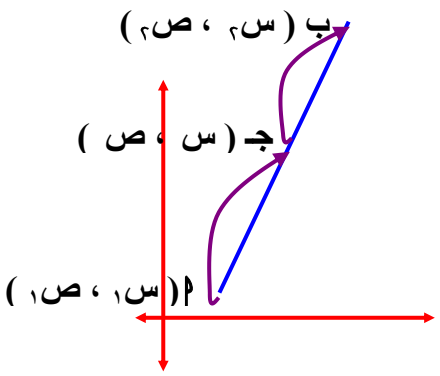
{ ثانيا } أحداثى النقطة هـ بحيث أ ب جـ د متوازى أضلاع

(٥) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (−١ ، −١) ، $\overrightarrow{ب}$ = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ك $\overrightarrow{ص}$ فأوجد قيمة (ك) التى تجعل || $\overrightarrow{أ ب}$ || = ٥

(٦) إذا كان $\overrightarrow{ب}$ = (−٥ ، ك) فأوجد قيمة (ك) التى تجعل || $\overrightarrow{ب}$ || = ١٣

تقسيم قطعة مستقيمة

أولاً التقسيم من الداخل :



فى الشكل المقابل :

إذا كانت النقطة جـ (س ، ص) تقع بين النقطتين

أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) بحيث :

$$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{\text{م}_1}{\text{م}_2}$$

فإن : النقطة جـ تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة م١ : م٢

ونوجد إحداثى نقطة جـ (س ، ص) من العلاقتين :

$$\text{س} = \frac{\text{م}_1\,\text{س}_2 + \text{م}_2\,\text{س}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\text{م}_1\,\text{ص}_2 + \text{م}_2\,\text{ص}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2}$$

مثـال : إوجد إحداثى النقطة جـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

حيث : أ (١ ، ٢) ، ب (٤ ، ٥)

الحـــل

$$\text{س} = \frac{\text{م}_1\,\text{س}_2 + \text{م}_2\,\text{س}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2} = \frac{١ \times ٤ + ٢ \times ١}{١ + ٢} = \frac{٦}{٣} = ٢$$

$$\text{ص} = \frac{\text{م}_1\,\text{ص}_2 + \text{م}_2\,\text{ص}_1}{\text{م}_1 + \text{م}_2} = \frac{١ \times ٥ + ٢ \times ٢}{١ + ٢} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

س	النسبة	ص
١	١ + ٢	٢
٤		٥

∴ جـ (س ، ص) = (٢ ، ٣)

مثـ٢ـال : إذا كانت أ = (−١ ، ٣) ، ب = (٤ ، ٨) أوجد أحداثيات جـ التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة ٢ : ٣

الحـــل

س	النسبة	ص
−١	٢ + ٣	٣
٤		٨

بفرض أن جـ = (س ، ص)

$$س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} = \frac{٢ \times ٤ + ٣ \times -١}{٢ + ٣} = \frac{٨ - ٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$$

$$ص = \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢} = \frac{٢ \times ٨ + ٣ \times ٣}{٢ + ٣} = \frac{٢٥}{٥} = ٣$$

أحداثيات جـ (س ، ص) = (١ ، ٥)

مثـ٣ـال : إوجد إحداثى النقطة حـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ٤ : ٣

حيث : أ (−٥ ، −٤) ، ب (٢ ، −٤)

س	النسبة	ص
−٥	٤ + ٣	−٤
٢		−٤

الحـــــل

$$س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} = \frac{٢ \times ٤ + ٣ \times -٥}{٤ + ٣} = \frac{-٧}{٧} = -١$$

$$ص = \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢} = \frac{٤ \times -٤ + ٣ \times -٤}{٤ + ٣} = \frac{-٢٨}{٧} = -٤$$

أحداثيات جـ (س ، ص) = (−١ ، −٤)

ملحوظة : إذا كانت النقطة حـ (س ، ص) منتصف $\overline{أ ب}$ حيث :

أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) فإن :

$$س = \frac{س_١ + س_٢}{٢} \quad ، \quad ص = \frac{ص_١ + ص_٢}{٢}$$

مثـ٤ـال : أوجد إحداثى نقطة م منتصف $\overline{أ ب}$ حيث : أ = (٣ ، ٥) ، ب = (١ ، −١)

الحـــــــل

$$م = \left(\frac{٣ + ١}{٢} \quad ، \quad \frac{٥ - ١}{٢} \right) = (٢ ، ٢)$$

مثـ٥ـال : إذا كانت م (١ ، ٢) هى منتصف $\overline{أ ب}$ حيث : أ = (س ، ١) ، ب = (٣ ، ص)

فإوجد قيمة كل من س ، ص

الحـــــــــــــل

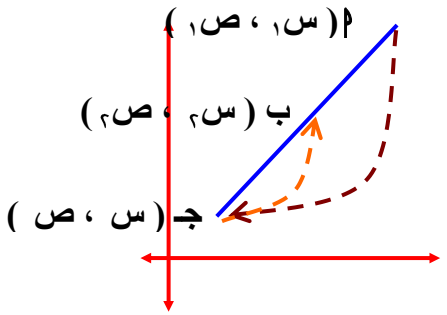
∵ م هى نقطة المنتصف

∴ (١ ، ٢) = ($\frac{س + ٣}{٢}$ ، $\frac{١ + ص}{٢}$)

∵ ١ = $\frac{س + ٣}{٢}$ ∴ س + ٣ = ٢ ومنها : س = ـ ١

، ٢ = $\frac{١ + ص}{٢}$ ∴ ١ + ص = ٤ ومنها : ص = ٣

ثانيا التقسيم من الخارج :



فى الشكل المقابل :

إذا كانت النقطة جـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، جـ ∉ $\overline{أب}$ بحيث :

$\frac{أجـ}{جـب} = \frac{م١}{م٢}$

فإن : النقطة جـ تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة م١ : م٢

ونوجد إحداثى نقطة جـ (س ، ص) من العلاقتين :

س = $\frac{م١ س٢ - م٢ س١}{م١ - م٢}$ ، ص = $\frac{م١ ص٢ - م٢ ص١}{م١ - م٢}$

مثـــال٦ : إوجد إحداثى النقطة جـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٢ : ٥

حيث : أ (١ ، −٣) ، ب (٤ ، ٣)

الحـــــــل

س	النسبة	ص
١	٢	٣ـ
٤	٥	٣

س = $\frac{م١ س٢ - م٢ س١}{م١ - م٢}$ = $\frac{٢×٤ + ٥ـ×١}{٢ ـ ٥}$ = $\frac{٣}{٣ـ}$ = ـ ١

ص = $\frac{م١ ص٢ - م٢ ص١}{م١ - م٢}$ = $\frac{٢ × ٣ ـ ٥ × ٣ـ}{٢ ـ ٥}$ = $\frac{٢١}{٣ـ}$ = ـ ٧

أحداثيات جـ (س ، ص) = (ـ ١ ، ـ ٧)

مثـ٧ـال : إذا كانت أ = (−١ ، ٣) ، ب = (٤ ، ٨) أوجد (جـ) التى تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٧ : ٢

الحـــــل

س	النسبة	ص
−١	٧	٣
٤	٢	٨

$$س = \frac{م_١ س_٢ - م_٢ س_١}{م_١ - م_٢} = \frac{٤ \times ٧ + ٢ \times -١}{٧ - ٢} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$$

$$ص = \frac{م_١ ص_٢ - م_٢ ص_١}{م_١ - م_٢} = \frac{٧ \times ٨ - ٢ \times ٣}{٧ - ٢} = \frac{٥٠}{٥} = ١٠$$

أحداثيات جـ (س ، ص) = (٦ ، ١٠)

مثـ٨ـال : إوجد إحداثى النقطة جـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢

حيث : أ (٢ ، ٥) ، ب (٧ ، −١)

الحـــــل

س	النسبة	ص
٢	٣	٥
٧	٢	−١

$$س = \frac{م_١ س_٢ - م_٢ س_١}{م_١ - م_٢} = \frac{٣ \times ٧ + ٢ \times -٢}{٣ - ٢} = \frac{١٧}{١} = ١٧$$

$$ص = \frac{م_١ ص_٢ - م_٢ ص_١}{م_١ - م_٢} = \frac{٣ \times -١ - ٢ \times ٥}{٣ - ٢} = \frac{-١٣}{١} = -١٣$$

أحداثيات جـ (س ، ص) = (١٧ ، −١٣)

ملاحظة (١) : لإيجاد نسبة التقسيم ونوعه نستخدم إحدى العلاقتين :

$$س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} \quad أو \quad ص = \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢}$$

ثم نوجد $م_١$: $م_٢$ فإذا كانت (متشابهتين فى الأشارة) يكون التقسيم من الداخل

، إذا كانت (مختلفتين فى الأشارة) يكون التقسيم من الخارج

مثـ٩ـال : إذا كانت أ = (−١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ٧) ، جـ = (س ، ٤) أوجد النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ مبينا نوع التقسيم ثم أوجد قيمة س

الحـــل

$$ص = \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢} = \frac{م_١ \times ٧ + م_٢ \times ٢}{م_١ + م_٢} = ٤$$

$$\therefore ٧ م_١ + ٢ م_٢ = ٤ م_١ + ٤ م_٢$$

$$\therefore ٧ م_١ - ٤ م_١ = ٤ م_٢ - ٢ م_٢ \Longleftarrow ٣ م_١ = ٢ م_٢$$

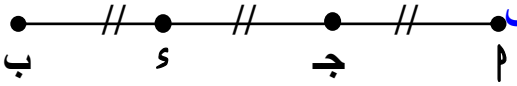
$م_١ : م_٢ = ٢ : ٣$ لهما نفس الأشارة (التقسيم من الداخل)

$$\therefore س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} = \frac{٢ \times ٤ + ٣ \times -١}{٢ + ٣} = \frac{٨ - ٣}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$$

س	النسبة	④
−١	م١	٢
٤	م٢	٧

مثـ١٠ـال : إذا كانت أ = (−١ ، ١) ، ب = (٢ ، ٧) أوجد أحداثيات النقط التى تقسم أ ب من الداخل إلى ثلاث أجزاء متساوية

الحـــل



(جـ) تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

$$س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} = \frac{١ \times ٢ + ٢ \times -١}{١+٢} = \frac{صفر}{٣} = ٠$$

$$ص = \frac{م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١}{م_١ + م_٢} = \frac{١ \times ٧ + ٢ \times ١}{١+٢} = \frac{٩}{٣} = ٣$$

$\therefore$ جـ (س ، ص) = (٠ ، ٣)

(ء) منتصف $\overline{جـ ب}$ $\therefore$ ء = $\left(\frac{٠+٢}{٢} ، \frac{٣+٧}{٢} \right)$ = (١ ، ٥)

س	النسبة	ص
−١	①	١
٢	②	٧

مثـ١١ـال : إذا كانت أ(٦ ، −٢) ، ب (٢ ، ١) ، حـ (−٣ ، ٤) حيث : أ ، ب ، حـ على إستقامة واحدة أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{أ جـ}$ بالنقطة ب مبيناً نوع التقسيم

الحـــل

$$س = \frac{م_١ س_٢ + م_٢ س_١}{م_١ + م_٢} = \frac{م_١ \times -٣ + م_٢ \times ٦}{م_١ + م_٢} = ٢$$

②	النسبة	①
٦	م١	−٢
−٣	م٢	٤

إدوار

∴ −٣ م١ + ٦ م٢ = ٢ م١ + ٢ م٢

∴ ٤ م٢ − ٢ م٢ = ٣ م١ + ٢ م١ ⟸ ٤ م٢ = ٥ م١

∴ $\frac{م١}{م٢}$ = $\frac{٤}{٥}$ لهما نفس الأشارة (التقسيم من الداخل)

ملاحظة (٢) : لإيجاد نسبة تقسيم محورى الإحداثيات لقطعة مستقيمة :

١ – نسبة تقسيم قطعة مستقيمة بمحور السينات " نقطة التقاطع (س ، ٠) "

نستخدم العلاقة : م١ ص٢ + م٢ ص١ = صفر

٢ – نسبة تقسيم قطعة مستقيمة بمحور الصادات " نقطة التقاطع (٠ ، ص) "

نستخدم العلاقة : م١ س٢ + م٢ س١ = صفر

مثـــال : إذا كانت أ = (٢ ، −٤) ، ب = (٣ ، ٥) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{أب}$ بواسطة محورى الاحداثيات

الحـــــل

س	النسبة	٠
٢	م١	−٤
٣	م٢	٥

نفرض جـ تقسم $\overline{أب}$ بواسطة محور السينات ∴ جـ = (س ، ٠)

ص = $\frac{م١ \times ص٢ + م٢ \times ص١}{م١ + م٢}$ = $\frac{م١ \times ٥ + م٢ \times -٤}{م١ + م٢}$ = صفر

٥م١ − ٤ م٢ = ٠ ٥م١ = ٤ م٢ ∴ $\frac{م١}{م٢}$ = $\frac{٤}{٥}$

∴ أ ب تنقسم بمحور السينات بنسبة ٤ : ٥ من الداخل

ص	النسبة	٠
−٤	م١	٢
٥	م٢	٣

نفرض ء تقسم $\overline{أب}$ بواسطة محور الصادات ∴ ء = (٠ ، ص)

س = $\frac{م١ \times س٢ + م٢ \times س١}{م١ + م٢}$ = $\frac{م١ \times ٣ + م٢ \times ٢}{م١ + م٢}$ = صفر

٣ م١ + ٢ م٢ = ٠ ٣ م١ = − ٢ م٢ ∴ $\frac{م١}{م٢}$ = $\frac{-٢}{٣}$

∴ أ ب تنقسم بمحور الصادات بنسبة ٢ : ٣ من الخارج

مثـ٦ـال : إذا كانت أ (٢ ، ٣) ، ب (−٣ ، ٥) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{أب}$ بنقطة تقاطعها مع محور الصادات مبيناً نوع التقسيم

الحـــــل

نفرض ء تقسم $\overline{أب}$ بواسطة محور الصادات (٠ ، ص)

س = $\frac{م_١ \times س_٢ + م_٢ \times س_١}{م_١ + م_٢}$ = $\frac{م_١ \times -٣ + م_٢ \times ٢}{م_١ + م_٢}$ = صفر

-٣ $م_١$ + ٢ $م_٢$ = ٠ ٣ $م_١$ = ٢ $م_٢$ ∴ $\frac{م_١}{م_٢}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ أ ب تنقسم بمحور الصادات بنسبة ٢ : ٣ من الداخل

⊙ النسبة		ص
٢	$م_١$	٣
-٣	+	٥
	$م_٢$	

ملاحظة (١) : إحداثى نقطة تقاطع متوسطات أى مثلث أ ب حـ حيث :

أ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) ، حـ ($س_٣$ ، $ص_٣$)

هى : ($\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣}$ ، $\frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣}$)

مثـ٧ـال : Δ أ ب حـ فيه أ (٦ ، ٥) ، ب (١ ، ٣) ، حـ (٥ ، ١) أوجد إحداثى نقطة تقاطع متوسطات مثلث أ ب حـ

الحـــــل

نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب جـ هى

($\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣}$ ، $\frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣}$)

= ($\frac{٦ + ١ + ٥}{٣}$ ، $\frac{٥ + ٣ + ١}{٣}$) = ($\frac{١٢}{٣}$ ، $\frac{٩}{٣}$) = (٤ ، ٣)

تمارين على تقسيم قطعة مستقيمة

(١) إوجد إحداثى النقطة حـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢
حيث : أ (– ١ ، ٢) ، ب (٢ ، ٨)

(٢) إوجد إحداثى النقطة حـ (س ، ص) التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة ٣ : ٢
حيث : أ (٥ ، – ٣) ، ب (– ٢ ، ١١)

(٣) إوجد إحداثى نقطة أ التى تقع عند ربع المسافة من النقطة ب (٧ ، – ٤)
إلى النقطة حـ (– ١ ، ٠)

(٤) إذا كانت أ (٣ ، ٢) ، ب (٦ ، ٨) أوجد إحداثى حـ ، ء بحيث تنقسم $\overline{\text{أ ب}}$
إلى ثلاث قطع مستقيمة متساوية

(٥) إذا كانت حـ $\notin$ $\overline{\text{أ ب}}$ ، بعد حـ عن أ ضعف بعدها عن ب حيث ا (٦ ، ٤) ، ب (٩ ، ٧)
أوجد إحداثى حـ

(٦) إذا كانت أ (– ٣ ، ٥) ، ب (١ ، ١) ، كانت حـ تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة ١ : ٣ ،
ء تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الخارج بنفس النسبة أوجد طول $\overline{\text{حـ ء}}$

(٧) إذا كانت حـ (س ، – ٥) تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الداخل بنسبة ٤ : ١ ، وكانت أ (٨ ، ٣)
، ب (٣ ، ص) أوجد قيمة كل من س ، ص

(٨) إذا كانت أ (٣ ، – ٢) ، ب (– ٢ ، ٤) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{\text{أ ب}}$ بالنقطة
حـ (٨ ، ص) ثم أوجد قيمة ص

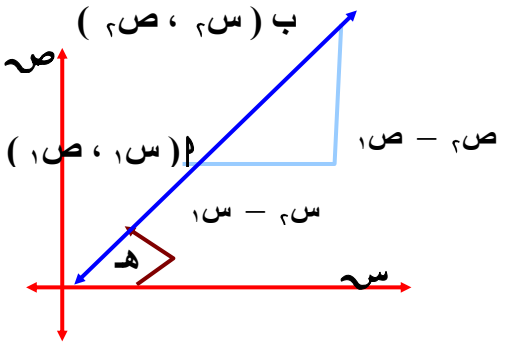
(٩) إذا كانت أ (٨ ، ٣) ، ب (٣ ، – ٢) أوجد النسبة التى تنقسم بها $\overline{\text{أ ب}}$ بكل من محورى
الإحداثيات مبيناً نوع التقسيم ثم أوجد نقطتى التقسيم

(١٠) أوجد إحداثيات نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ حيث :
أ (٣ ، ٣) ، ب (– ٢ ، ٥) ، حـ (– ٤ ، ٢)

(١١) إذا كانت ء (٢ ، – ١) هى نقطة تقاطع متوسطات Δ أ ب حـ حيث :
أ (٥ ، – ٤) ، ب (– ٣ ، ٢) أوجد إحداثى نقطة حـ

معادلة الخط المستقيم

" طرق إيجاد ميل الخط المستقيم "



(١) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين :

أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢) هو :

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$$

فمثلاً : (١) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين : (٤ ، − ١) ، (٧ ، ٢) هو :

$$م = \frac{٧ - ٤}{٢ - (-١)} = \frac{٣}{٣} = ١$$

(٢) إذا كان متجه إتجاه المستقيم (أ ، ب) فأن الميل $م = \frac{ب}{أ}$

فمثلاً : ميل المستقيم الذى معادلته هى : (س ، ص) = (٢ ، ٧) + ك (٤ ، ٥) هو : $م = \frac{٥}{٤}$

(٣) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى : ص = م س + حـ

فإن ميل الخط المستقيم هو : م

فمثلاً : ميل الخط المستقيم الذى معادلته : ص = ٣ س − ٥ هو : م = ٣

(٤) إذا كانت معادلة الخط المستقيم هى : ا س + ب ص + حـ = ٠

فإن ميل الخط المستقيم هو : $م = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{أ}{ب}$

فمثلاً : ميل الخط المستقيم الذى معادلته : ٢ ص + ٣ س − ٥ = ٠ هو : $م = \frac{-٣}{٢}$

(٥) تعريف : ميل المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها هـ هو : م = طا هـ

فمثلاً : ميل الخط المستقيم الذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

هو : م = طا ٤٥° = ١

الزاويه هـ	صفر	٤٥°	١٣٥°	٩٠°
الميل : ظا هـ	صفر	١	- ١	غير معرف

ملاحظات :

(١)إذا كان المستقيمان المتوازيان

فأن متجه أتجاه الأول = متجه أتجاه الثانى ويكون ميل الأول = ميل الثانى

($م_١ = م_٢$) ، وبالعكس إذا كان المستقيمان متوازيان فإن ميلاهما متساويان

فمثلاً : إذا كان ميل مستقيم = $\frac{١}{٣}$ فإن : ميل المستقيم الموازى له = $\frac{١}{٣}$

أو متجه أتجاه المستقيم الأول (٣ ، ١) فإن متجه أتجاه المستقيم الثانى (٣ ، ١)

(٢) إذا كان المستقيمان المتعامدان

فإن متجه إحداهما (أ ، ب) ومتجه الثانى (ب ، – أ) ويكون حاصل ضرب ميلاهما :

($م_١ \times م_٢ = -١$) وبالعكس إذا كان حاصل ضرب ميلاهما = – ١ المستقيمان متعامدان

فمثلاً : إذا كان ميل مستقيم = $\frac{٢}{٥}$ فإن : ميل المستقيم العمودى عليه = $\frac{-٥}{٢}$

أ، متجه أتجاه المستقيم الأول (٥ ، ٢) فإن متجه أتجاه المستقيم الثانى (٢ ، – ٥)

(٣) ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = صفر م = صفر والعكس صحيح

(٤) ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات غير معرف " $\frac{صفر}{١}$ "

(٥) لأى ثلاث نقط أ ، ب ، حـ إذا كان : ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ميل $\overleftrightarrow{أحـ}$

فإن : النقط أ ، ب ، حـ تكون على إستقامة واحدة

الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم :

المعادلة المتجهه: $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{ق} + ك \overrightarrow{ى}$

(س ، ص) = ($س_١$ ، $ص_١$) + ك (أ ، ب)

المعاتلتين الوسيطيتين : س = $س_١$ + ك أ ،،، ص = $ص_١$ + ك ب

المعادلة المتماثلة (الإحداثية) معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) ، وميله م

هى : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$ أ, (ص – $ص_١$) = م (س – $س_١$)

" الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هى : أ س + ب ص + حـ = ٠ "

مثـ١ـال : أوجد معادلات الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥) ، ومتجه إتجاهه (١ ، ٢)

الحـــــــــــل

المعادلة المتجهه: (س ، ص) = (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) + ك (أ ، ب)

(س ، ص) = (٣ ، ٥) + ك (١ ، ٢)

المعاتلتين الوسيطيتين : س = س$_{١}$ + ك أ ،،، ص = ص$_{١}$ + ك ب

س = ٣ + ك ،،، ص = ٥ + ٢ك

المعادلة المتماثلة ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ٥) ، وميله م = $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{٢}{١}$

$\frac{ص - ص_{١}}{س - س_{١}}$ = $\frac{ص - ٥}{س - ٣}$ = ٢

∴ ص – ٥ = ٢ س – ٦ أى : ٢ س – ص – ١ = ٠

مثـ٢ـال : أوجد معادلات الخط المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٦ ، ٤)

الحـــــــــــل

∵ المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) ، وميله م = $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$ = $\frac{٤ - ١}{٦ - ٣}$ = $\frac{٣}{٣}$ = ١

المعادلة المتجهه: (س ، ص) = (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) + ك (أ ، ب)

(س ، ص) = (٣ ، ١) + ك (١ ، ١)

المعاتلتين الوسيطيتين : س = س$_{١}$ + ك أ ،،، ص = ص$_{١}$ + ك ب

س = ٣ + ك ،،، ص = ١ + ك

معادلة الخط المستقيم يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٦ ، ٤)

$\frac{ص - ص_{١}}{س - س_{١}}$ = م ∴ $\frac{ص - ١}{س - ٣}$ = ١

∴ ص – ١ = س – ٣ ∴ س – ص – ٢ = ٠

مثـــ٣ـــال : معادلة الخط المستقيم الذى ميله يساوى ٤ ، ويقطع من محور الصادات الوجب جزءاً طوله يساوى ٣

الحـــــــــــل :

المادلة هى : ص = م س + حـ ∴ ص = ٤ س + ٣

المعادلة المتجهه: ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٣) ، وميله م = $\frac{ب}{أ}$ = ٤

(س ، ص) = (٠ ، ٣) + ك (١ ، ٤)

ملاحظة : معادلة الخط المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (أ ، ٠) ، و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب) هى : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

أ هو الجزء المقطوع من محور السينات ، ب هو الجزء المقطوع من محور الصادات

و تسمى هذه المعادلة بمعادلة المستقيم بدلالة الجزأين المقطوعين من محورى الإحداثيات أو تسمى صورة المقطعين

مثـــ٤ـــال : معادلة الخط المستقيم الذى يقطع من محور السينات السالب جزءاً طوله وحدتين ، و يقطع من محور الصادات الموجب جزاً طوله ٣ وحدات

الحـــــــــــل

∵ معادلة الخط المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (١ ، ٠) ، و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب) هى : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

∴ المعادلة هى : $\frac{س}{-٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ ∴ ٣ س − ٢ ص − ٦ = ٠

ملاحظات :

(١) المستقيم الموازى لمحور السينات و يمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$) ميله م = صفر

المعادلة المتجهه : ر = ($س_١$ ، $ص_١$) + ك (١ ، ٠) ، المعادلة العامة ص = $ص_١$

(٢) معادلة المستقيم الموازى لمحور الصادت و يمر بالنقطة (س١ ، ص١) ميله م = $\frac{١}{٠}$

المعادلة المتجهه : ر = (س١ ، ص١) + ك (٠ ، ١) ، المعادلة العامة س = س١

(٣) معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و (٠ ، ٠) " ميل المستقيم = م "

هى المعادلة المتجهه ر = ك (أ ، ب) ، المعادلة العامة : ص = م س

(٤) فى المعادلة : أ س + ب ص + حـ = ٠

لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات نضع ص = ٠

، لإيجاد الجزء المقطوع من محور السينات نضع س = ٠

(٥) المستقيم الذى يقطع من محور السينات جزءاً طوله (أ) يمر بالنقطة (أ ، ٠)

، المستقيم الذى يقطع من محور الصادات جزءاً طوله (ب) يمر بالنقطة (٠ ، ب)

مثـــال : أوجد المعادلة المتجهه للمستقيم المار بالنقطة (−١ ، ٣) وميله = $\frac{٣}{٥}$

الحـــــل

∵ المستقيم مار بالنقطة (−١ ، ٣) ، وميله م = $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{٣}{٥}$

∴ المعادلة المتجهه: (س ، ص) = (س١ ، ص١) + ك (أ ، ب)

(س ، ص) = (−١ ، ٣) + ك (٥ ، ٣)

مثـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين أ (١ ، ٢) ، ب (٥ ، ٧)

الحـــــل

∵ المستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٢) ، وميله م = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{٧ - ٢}{٥ - ١}$ = $\frac{٥}{٤}$

المعادلة م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ ∴ $\frac{ص - ٢}{س - ١}$ = $\frac{٥}{٤}$

∴ المعادة هى : ٥ س − ٥ = ٤ ص − ٨ ٥ س − ٤ ص + ٣ = ٠

مثـــال ٧ : أوجد معادلة المستقيم الذى معادلته المتجهه ر = (−٧ ، ٥) + ك (−٢ ، ٣)

الحـــــل

∵ ر = (−٧ ، ٥) + ك (−٢ ، ٣)

∴ المستقيم يمر بالنقطة (− ٧ ، ٥) ، وميله م = $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{-٣}{٢}$

المعادلة $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م ∴ $\frac{ص - ٥}{س + ٧}$ = $\frac{-٣}{٢}$

∴ المعادة هى : − ٣ س − ٢١ = ٢ ص − ١٠ ٣ س + ٢ ص + ١١ = ٠

مثـــال ٨ : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (−٢ ، ٣)

ويوازى المستقيم ٤ س − ٧ ص +٣ = ٠

الحـــــل

∵ المستقيمان متوازان ∴ م$_١$ = م$_٢$ م$_{الموازى}$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{٤}{٧}$ م$_{المطلوب}$ = $\frac{٤}{٧}$

المعادلة $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م ∴ $\frac{ص - ٣}{س + ٢}$ = $\frac{٤}{٧}$

∴ ٤ س + ٨ = ٧ ص − ٢١ ∴ ٤ س − ٧ص +٢٩ = ٠

مثـــال ٩ : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٤)

ويكون عمودى على المستقيم ٥ س + ٧ ص = ١

الحـــــل

∵ المستقيمان متعامدان ∴ م$_١$ × م$_٢$ = − ١ م$_{العمودى}$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٥}{٧}$

∴ م$_{المطلوب}$ = $\frac{٧}{٥}$ المعادلة $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م ∴ $\frac{ص - ٤}{س - ٣}$ = $\frac{٧}{٥}$

∴ ٧س − ٢١ = ٥ ص − ٢٠ ٧س − ٥ص − ١ = ٠

مثـــال ١٠ : أوجد المعادلة الوسيطية للمستقيم المار بالنقطة (١ ، -٤) ويوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٣) ، (٤ ، ٥)

الحـــــل

∵ المستقيمان متوازان ∴ $م_١ = م_٢$ $\frac{٢}{٣}$ $م_{الموازى} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٣}{٤ - ١} = \frac{٢}{٣}$

∵ المستقيم مار بالنقطة (١ ، -٤) ، وميله م = $م_{المطلوب} = \frac{ب}{أ} = \frac{٢}{٣}$

∴ المعاتلتين الوسيطيتين : س = $س_١$ + ك أ ،،، ص = $ص_١$ + ك ب

س = ١ + ٣ ك ،،، ص = -٤ + ٢ ك

مثـــال ١١ : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-٢ ، -٤) وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٢) ، (٣ ، ٥)

الحـــــل

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $م_١ \times م_٢ = -١$ $م_{العمودى} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٢}{٣ + ١} = \frac{٣}{٤}$

∴ $م_{المطلوب} = \frac{-٤}{٣}$ المعادلة $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م$ ∴ $\frac{ص + ٤}{س + ٢} = \frac{-٤}{٣}$

∴ ٣ ص + ١٢ = -٤ س - ٨ ٣ ص +٤ س + ٢٠ = ٠

مثـــال ١٢ : أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع ٣ وحدات من الجزء الموجب لمحور السينات ، ٤ وحدات من الجزء السالب لمحور الصادات

الحـــــل

∵ معادلة الخط المستقيم الذى يقطع محور السينات فى النقطة (أ ، ٠) ، و يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ب) هى : $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

∴ $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{-٤} = ١$ بالضرب×١٢ ٤ س - ٣ ص = ١٢

مثـــ١٣ـــال : أوجد المقطوعتين السينية والصادية للمستقيم ٢ س – ٥ ص = ١٠

الحـــــــــل

لايجاد المقطوعة السينية نضع ص = ٠ ⟸ ٢ س = ١٠ س = ٥

المقطوعة السينية = ٥ النقطة (٥ ، ٠)

لايجاد المقطوعة الصادية نضع س = ٠ ⟸ – ٥ ص = ١٠ ص = –٢

المقطوعة الصادية = ٢ النقطة (٠ ، – ٢)

مثـــ١٤ـــال : إذا كانت النقطة (أ ، ٣) تنتمى للمستقيم ٢ س + ٥ ص – ١٧ = ٠ أوجد قيمة أ

الحـــــــــل

بالتعويض فى المعادلة ٢ أ + ٥ (٣) – ١٧ = ٠ ٢ أ +١٥ – ١٧ = ٠

٢ أ – ٢ = ٠ ٢ أ = ٢ ∴ أ = ١

مثـــ١٥ـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى محور السينات

الحـــــــــل

ميل المستقيم // محور السينات ∴ ميل المستقيم م = صفر ∴ ص = ص$_{١}$ = ٣

مثـــ١٦ـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى محور الصادات

الحـــــــــل

ميل المستقيم // محور الصادات ∴ ميل المستقيم م = $\frac{١}{٠}$ ∴ س = س$_{١}$ = ٢

مثـــ١٧ـــال : أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع المستقيم ٣س – ٢ ص + ١١ = ٠

على التعامد عندما : س = ١

الحـــــــــل

عندما : س = ١ ٣ – ٢ ص + ١١ = ٠

– ٢ ص + ١٤ = ٠ – ٢ ص = – ١٤ ص = ٧

$م_{المستقيم} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$ ∴ $م_{العمودى} = \frac{-٢}{٣}$

المستقيم المطلوب يمر بالنقطة (١ ، ٧) وميله = $\frac{-٢}{٣}$

$م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ ∴ $\frac{ص - ٧}{س - ١} = \frac{-٢}{٣}$

∴ ٣ ص − ٢١ = −٢س+٢ ٣ ص + ٢ س − ٢٣ = ٠

مثـــال ١٨ : إذا كان أ = (−٣ ، ١) ، ب = (٥ ، ٧) أوجد محور تماثل $\overline{أ ب}$

الحـــــل

محور القطعة هو المستقيم العمودى على أ ب من منتصفها

منتصف $\overline{أ ب}$ = $(\frac{-٣ + ٥}{٢} ، \frac{١ + ٧}{٢})$ = (١ ، ٤)

ميل $\overline{أ ب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧ - ١}{٥+٣} = \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

محور التماثل يمر بالنقطة (١ ، ٤) وميله $_{عمودى}$ = $\frac{-٤}{٣}$

$م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ ∴ $\frac{ص - ٤}{س - ١} = \frac{-٤}{٣}$

٣ ص − ١٢ = −٤س +٤ ٣ص + ٤ س − ٨ = ٠

مثـــال ١٩ : إذا كان $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م حيث أ = (−٤ ، ١) ، ب = (−٢ ، ٤)

أوجد معادلة المماس للدائرة م عند أ

الحـــــل

المماس لدائرة يكون عمودياً على القطر المرسوم من نقطة التماس (أ)

ميل $\overline{أ ب}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ١}{-٢+٤} = \frac{٣}{٢}$

∵ المماس عمودى على نصف القطر ميل المماس = $\frac{-٢}{٣}$

المماس يمر بالنقطة (−٤ ، ١) وميله = $\frac{-٢}{٣}$

$\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م ∴ $\frac{ص - ١}{س + ٤} = \frac{-٢}{٣}$

٣ص − ٣ = −٢ س − ٨ ٣ص + ٢ س + ٥ = ٠

مثـــال ٢٠ : إذا كان أجـ قطر فى المربع أ ب جـ ء حيث أ = (٣ ، ٥) ، جـ = (−١ ، −١)

أوجد معادلة القطر ب ء

الحـــــــــل

القطر $\overline{ب ء}$ يمر بمنتصف القطر $\overline{أ جـ}$ وعمودى عليه

∴منتصف $\overline{أ جـ}$ = ($\frac{٣+(-١)}{٢}$ ، $\frac{٥+(-١)}{٢}$) = (١ ، ٢)

ميل $\overline{أ جـ}$ = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = $\frac{-١ - ٥}{-١ - ٣}$ = $\frac{-٦}{-٤}$ = $\frac{٣}{٢}$ ∴ ميل العمودى $\overline{ب ء}$ = $\frac{-٢}{٣}$

القطر ب ء يمر بالنقطة (١ ، ٢) وميله = $\frac{-٢}{٣}$

∴ معادلة $\overline{ب ء}$ $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ = م ∴ $\frac{ص - ٢}{س - ١} = \frac{-٢}{٣}$

٣ص − ٦ = −٢ س + ٢ ٣ص + ٢س − ٨ = ٠

تدريب (١) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، ٣) ويوازى المستقيم : س + ٣ ص − ٥ = ٠

الحـــــل

ميل المستقيم : س + ٣ ص − ٥ = ٠ هو : م١ =

∵ المستقيمان متوازيان

∴ ميل المستقيم المطلوب هو : م٢ =

∵ معادلة المستقيم هى : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = م

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى :

تدريب (٢) : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٥) ويكون عمودياً على المستقيم : ٥ س − ٤ ص + ٦ = ٠

الحـــــل

ميل المستقيم : ٥ س − ٤ ص + ٦ = ٠ هو : م١ =

∵ المستقيمان متعامدان

∴ ميل المستقيم المطلوب هو : م٢ =

∵ معادلة المستقيم هى : $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$ = م

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى :

تدريب (٣) : أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ ، − ٥) ويصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥° ثم بين هل النقطة (٢ ، − ٣) تقع عليه أم لا ؟

الحـــــل

ميل المستقيم = طا ١٣٥° =

∵ معادلة المستقيم هى : $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$ = م

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى :

لإثبات أن : هل النقطة (٢ ، − ٣) تقع على هذا المستقيم أم لا

نضع : س = ، ص =

∴ فى معادلة المستقيم

∴ (٢ ، − ٣) على هذا المستقيم

تمارين على معادلات المستقيم

[١] أوجد معادلات المستقيم المار بالنقطة (١ , ٣) ومتجه إتجاهه (٢ , ٣)

[٢] أوجد معادلات المستقيم المار بالنقطة (−٥ , ١) ومتجه إتجاهه (٠ , ٤)

[٣] أوجدالمعادلة المتجه للمستقيم المار بالنقطتين (٢ , −١) , (٣ , ١)

[٤] أوجد المعادله الإحداثيه للمستقيم المار بالنقطتين (٣ , ٥) , (٠ , ٧)

[٥] أوجد المعادله العامه للمستقيم المار بالنقطه (٢ , ٠) وميله = $\frac{١}{٤}$

[٦] أوجد معادلــه المستقيم المار بالنقطه (٢ , ـ٣) وميله = $\frac{٢}{٥}$

[٧] أوجــد معادلــة المستقيم المار بالنقطة (١ ,ـ٢) وعمودى على المتجــه (ـ٣ , ٤)

[٨] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٥ , ١) وعمودى على المستقيم الذى ميله = $\frac{١}{٢}$

[٩] أوجــد معادلــة المستقيـــــم المار بنقطـــة الأصـــل وميلـة $\frac{-٢}{٣}$

[١٠] أ وجدالمعادلة الوســيطيتين للمســتقيم الما ر بنقطة تقاطع المســـتقيما ن

س ــ ص = ٢ ، ٢س + ص = ١٠ ويوازى المستقيم الذى ميله = ٣

[١١] أ وجد معادلةالمستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمان س + ص =٥ ، ٢س ـ ص = ١

وعمودى على المستقيم الذى ميله = $\frac{-٥}{٢}$

[١٢] أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٠ , ١) ويوازى المستقيم ٢س + ٣ص ــ ٣ = ٠

[١٣] أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (١ ،ـ ١) وعمودى على المستقيم ص = ٤س ــ٧

[١٤] أوجــد الصورة العامة للمستقيم المار بالنقطة (٤ , ـ ٦) وميله $\frac{-٣}{٢}$

وإثبت أنه يمر بنقطة الأصـــل

[١٥] أوجــد معادلة المستقيم المار المار بالنقطة (٢ , ٢) وميلــه = $\frac{١}{٤}$

وإذا كان يمر بالنقطتين (أ , ٣) ، (٤ , ب) فأوجــد قيمة أ , ب

[١٦] أ وجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة (٠ , ٢) ويصنع زاويـة موجبة قياسها ٤٥°

مع الإتجاه الموجب لمحور السينات ثم عين نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور الصـادات

[١٧] أوجــد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطــة (٥ , ـ ٦) ويصنع مع الإتجاه

الموجب لمحور الســينات زاويه قياســها ١٣٥°

[١٨] أوجد معادلةالمستقيم الذى ينصف أ ب وعمودى عليه : أ = (١ , ٢) ،ب = (ـ٥ , ٤)

[١٩] أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقة التى تقسم أ ب بنسبه ٢:١ ويكون عموديا على

المستقيم ر = (٠ , ٢) + ك (٤ , ٥) حيث أن أ = (٣ , ٤) ، ب = (ــ٣ , ــ ٥)

[٢٠] أوجــد معادلة المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطع المستقيمين س + ٢ص =٧

، ٢س + ص = ٨ ويوازى المستقيم الذى معادلتة س + ص = ٥

[٢١] أوجـد معادلة المستقيم الإحداثيه الذى معادلتة ر = (٥, ١) + ك (٣,٢)

[٢٢] أوجـد معادلة المستقيم الذى معادلتية س= ٣ + ٢ك ، ص = ـ١ ـ ٢ك

[٢٣] أوجـد المعادلة المتجه للمستقيم الذى معادلتة العامة ٢ س + ٥ ص = ١٠

[٢٤] أوجـد المعادلتين الوسيطيتين للمستقيم الذى معادلتة س ـ ٢ ص = ـ٢

[٢٥] اوجد معادلات المستقيم الذى يوازى محورالسينات ويمربالنقطة (١, ٥)

[٢٦] أوجد معادلات المستقيم الذى يوازى محورالصادات ويمربالنقطة (٦, ٧)

[٢٧] أوجد معادلة المستقيم المموازى لمحور للمستقيم : ٣ س ـ ٤ ص + ٧ = ٠ ويقطع جزءاً من محور الصادات مقداره ٦ وحدات

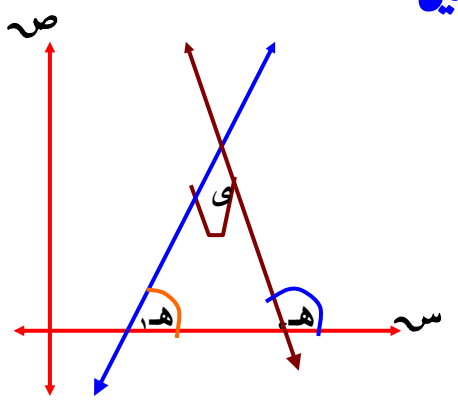
[٢٨] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ـ ٣) ويصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° ثم بين هل النقطة (٢ ، ـ ٥) تقع عليه أم لا ؟

[٢٩] أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (ـ ٥ ، ٤) ، وبنقطة الأصل

[٣٠] أوجد معادلة المستقيم الذى يقطع من محورى الإحداثيات السينى والصادى جزأين طوليهما ٣ ، ٤ على الترتيب

[٣١] إذا كانت أ (٥ ، ـ ٦) ، ب (٣ ، ٧) ، حـ (١ ، ـ ٣) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بنقطة أ وينصف ب حـ

الزاوية الحادة بين مستقيمين



المستقيمان اللذان ميلاهما : م١ ، م٢ ويحصران بينهما

زاوية قياسها ى فإن : ى تتعين من العلاقة

$$\text{طا ى} = \left| \frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} \right|$$

حيث : م١ = طا هـ١ ، م٢ = طا هـ٢

ملاحظات :

(١) إذا كان : م١ = م٢ أى مستقيمان متوازيان فإن : طا ى = ٠ وتكون : ى = ٠° أو ١٨٠°

(٢) إذا كان : م١ × م٢ = −١ أى مستقيمان متعامدان فإن : ى = ٩٠°

مثـ١ـال : أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين ٣ س − ص = ٥ ، ٢ س + ص − ٧ = ٠

الحـــــــل

$$\because م_١ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{-١} = ٣ \quad ، م_٢ = \frac{-٢}{١} = -٢$$

$$\text{ظاهـ} = \left| \frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} \right| = \left| \frac{٣ - (-٢)}{١ + ٣ \times -٢} \right| = \left| \frac{٥}{-٥} \right| = ١ \qquad \text{ق}(\angle \text{هـ}) = ٤٥°$$

مثـ٢ـال : إذا كانت أ = (١ ، ٤) ، ب = (٢ ، ١) ، جـ = (٤ ، ٢) أوجد ق (∠ ب أ جـ) المنفرجة

الحـــــــل

$$م_١ = م_{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٤}{٢ - ١} = -٣ \quad ، م_٢ = م_{أجـ} = \frac{٢ - ٤}{٤ - ١} = \frac{-٢}{٣} = \frac{٢}{-٣}$$

$$\text{ظاهـ} = \left| \frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} \right| = \left| \frac{-٣ - (-\frac{٢}{٣})}{١ + (-\frac{٢}{٣}) \times -٣} \right| = \left| \frac{-٩ + ٢}{٣ + ٦} \right| = \frac{٧}{٩}$$

∴ ق (∠ ب أ جـ) الحادة = ٥٣′ ٣٧° ∴ ق (∠ ب أ جـ) المنفرجة = ٧′ ١٤٢°

مثـ٣ـال : أوجد قياس الزاوية بين المستقيم الذى معادلته ٣س – ٢ ص +١ = ٠
والمستقيم الذى متجهه أتجاهه (٥ ، ١)

الحـــــــل

$م_١ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-٣}{-٢} = \frac{٣}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{ب}{أ} = \frac{١}{٥}$

$ظاهـ = \left| \frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} \right| = \left| \frac{\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٥}}{١ + \frac{٣}{٢} \times \frac{١}{٥}} \right| = \left| \frac{١٥ - ٢}{١٠ + ٣} \right| = \frac{١٣}{١٣} = ١$

∴ ظاهـ = ١ ∴ ق(∠ هـ) = ٤٥°

مثـ٤ـال : إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين تساوى ٤٥° فإذا علم أن ميل الاول = ٢
أوجد ميل الثانى

الحـــــــل

نفرض أن ميل الثانى = م ، هـ = ٤٥° ∴ ظا هـ = ١

$∴ ظاهـ = \left| \frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} \right| = \left| \frac{٢ - م}{١ + ٢ \times م} \right| = \left| \frac{٢ - م}{١ + ٢م} \right| = ١$

∴ ١ + ٢ م = ٢ – م ∴ ٢م + م = ٢ – ١ ∴ ٣م = ١ ∴ م = $\frac{١}{٣}$

مثـ٥ـال : إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين س – ك ص +٢ = ٠ ، س – ٣ ص +٤ = ٠
تساوى ٤٥° أوجد قيمة (ك)

الحـــــــل

$م_١ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-١}{-ك} = \frac{١}{ك}$ $م_٢ = \frac{-١}{-٣} = \frac{١}{٣}$

∵ هـ = ٤٥ ∴ ظاهـ = ١ ∴ = ١

$ظاهـ = \left| \frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢} \right| = \left| \frac{١ \backslash ك - (\frac{١}{٣})}{١ + (١ \backslash ك) \times (\frac{١}{٣})} \right| = \left| \frac{٣ - ك}{٣ ك + ١} \right| = ١$

٣ ك +١ = ٣ – ك ∴ ٣ ك + ك = ٣ – ١ ∴ ٤ ك = ٢ ∴ ك = ٢

تمارين على الزاوية الحادة بين مستقيمين

(١) أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$: ٢ س – ٣ ص = ٥ ، $ل_٢$: ٣ س + ص + ٦ = ٠

(٢)أوجد قياس الزاوية بين المستقيم الذى معادلته ٣ س – ٥ ص = ١ ، المستقيم الذى ميله = ٤

(٣) أوجد قياس الزاوية بين المستقيم الذى معادلته س + ٣ ص + ٢ = ٠

و المستقيم (س ، ص) = (٣ ، ٢) + ك (١ ، ٢)

(٤) إذا كان $ل_١$ مستقيم يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

، $ل_٢$ مستقيم ميله يساوى ٥ أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$

(٥) إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : س – ك ص = ٨ ، ٢ س – ص = ٥

يساوى ٤٥° أوجد قيمة ك

(٦) أوجـد قياس الزاوية بين المستقيمان $ل_١$, $ل_٢$ حيث أن

$ل_١$: ٤ س + ٣ ص = ٢ ، $ل_٢$: ر = (٢ , ٣) + ك (١ , ٤)

(٧) أوجـد قياس الزاوية بين المستقيمان $ل_١$, $ل_٢$ حيث أن

$ل_١$: س=٢ + ك , ص = ١ + ك ، $ل_٢$: ميلـه = $\frac{-٣}{٢}$

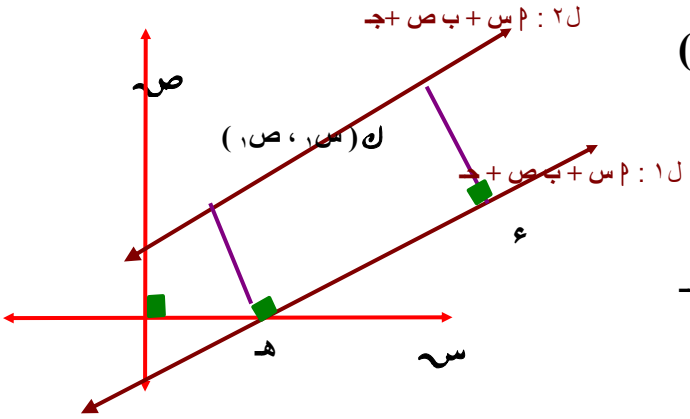
(٨) أوجـد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٤ , ٢) ويصنع مع الخط المستقيم

س ـ ٢ ص ـ = ٤ زاوية ظلـــها $\frac{٤}{٣}$

(٩) أو جـد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ , ٥) ويصنع مع الخط المســتقيم

ر = (٣ , ٢) + ك (٢ , ـ ٣) زاوية ظلها $\frac{٣}{٢}$

طول العمود من نقطة إلى خط مستقيم



طول العمود النازل من النقطة : ك (س١ ، ص١)

على المستقيم : أ س + ب ص + جـ = ٠

يعطى من العلاقة :

$$ل = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

ملاحظات :

(١) الرمز | ع | يعنى أن قيمة ع بدون إشارة

فمثلاً : | ٣ | = ٣ ، | −٣ | = ٣

(٢) إذا كان : | س | = ٥ فإن : س = ٥ أ؛ س = −٥

(٣) إذا كان : المقدار أ س١ + ب ص١ + جـ لنقطتين مختلفتين له نفس الإشارة

فإن : النقطتان تقعان على جانب واحد من المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

أما إذا كان له إشارتين مختلفتين فإن النقطتان تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم

(٤) إذا كان : المقدار أ س١ + ب ص١ + جـ لنقطة ما يساوى صفر

فإن : النقطة تقع على المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

مثـال : أوجد طول العمود الساقط من النقطة (−٢ ، ٥) على المستقيم ٣ س + ٤ ص + ٦ = ٠

الحـــل

∵ طول العمود = $\frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}} = \frac{|٣ \times -٢ + ٤ \times ٥ + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

∴ طول العمود = $\frac{|-٦ + ٢٠ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$ وحدة طول

مثـ٢ـال : أوجد طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ٣) على المستقيم ٤ س – ٣ ص – ١٤ = ٠

الحـــــل

∵ طول العمود = $\frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$ = $\frac{|٤ \times ٢ - ٣ \times ٣ - ١٤|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

∴ طول العمود = $\frac{|٨ - ٩ - ١٤|}{\sqrt{٢٥}}$ = $\frac{١٥}{٥}$ = ٣ وحدة طول

مثـ٣ـال :أوجد طول العمود النازل من النقطة (٢ ، –٣) على المستقيم ٨ س – ٦ ص + ١٣ = ٠

الحـــــل

∵ طول العمود = $\frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$ = $\frac{|٨ \times ٢ - ٦ \times -٣ + ١٣|}{\sqrt{٦٤+٣٦}}$

∴ طول العمود = $\frac{|١٦ + ١٨ + ١٣|}{\sqrt{١٠٠}}$ = $\frac{٤٧}{١٠}$ = ٤,٧ وحدة طول

مثـ٤ـال : أوجد طول العمود النازل من النقطة (٢ ، ١) على

المستقيم : ر = (٤ ، ٢) + ك (– ٣ ، ٤)

الحـــــل

المعادلة العامة للمستقيم : المار بالنقطة (٤ ، ٢) وميله م = $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ = $\frac{-٤}{٣}$

$\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1}$ = م $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٤}$ = $\frac{-٤}{٣}$

٣ ص – ٦ = – ٤ س + ١٦ المعادلة ٤س + ٣ص – ٢٢ = ٠ والنقطة (٢ ، ١)

∵ طول العمود = $\frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$ = $\frac{|٤ \times ٢ + ٣ \times ١ - ٢٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

∴ طول العمود = $\frac{|٨ + ٣ - ٢٢|}{\sqrt{٢٥}}$ = $\frac{١١}{٥}$ = ٢,٢ وحدة طول

مثـ٥ـال : إثبت أن المستقيمان ل١ : ٣ س + ٤ ص − ٨ = ٠ ، ل٢ : ر = (٥ ، − ٣) + ك (٨ ، − ٦) متوازيان واوجد البعد بينهما

الحـــــــل

ميل المستقيم الأول م١ = $\frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-٣}{٤}$ ، ميل الثانى م٢ = $\frac{ب}{أ}$ = $\frac{-٦}{٨}$ = $\frac{-٣}{٤}$

∵ م١ = م٢ ∴ المستقيمان

لإيجاد البعد بينهما نفرض نقطة على أحداها ونسقط عمود على الآخر

معادلة المستقيم ٣ س + ٤ ص − ٨ = ٠ والنقطة ∈ ل٢ (٥ ، − ٣)

∵ طول العمود = $\frac{|أ س١ + ب ص١ + حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ = $\frac{|٣ \times ٥ + ٤ \times -٣ - ٨|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$

∴ طول العمود = $\frac{|١٥ - ١٢ - ٨|}{\sqrt{٢٥}}$ = $\frac{٥}{٥}$ = ١ وحدة طول

مثـ٦ـال : إذا كان طول العمود النازل من نقطة الاصل على المستقيم ٤ س − ٣ ص + ك = ٠ يساوى ٣ وحدات أوجد قيمة ك

الحـــــــل

∵ طول العمود = $\frac{|أ س١ + ب ص١ + حـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$ = $\frac{|٤ \times ٠ - ٣ \times ٠ + ك|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

∴ طول العمود = $\frac{|ك|}{\sqrt{٢٥}}$ = ٣ ⟸ | ك | = ١٥ ∴ ك = ± ١٥

مثـ٧ـال :أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها (١ ، −٣) والمستقيم ١٢س − ٥ ص −١ = ٠ مماس لها واوجد محيطها ومساحتها

الحـــــــل

نصف قطر الدائرة هو البعد العمودى من مركز الدائرة الى مماس الدائرة

المستقيم ١٢س – ٥ ص –١ = ٠ النقطة (١ ، –٣)

∵ طول العمود = نق = $\frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$ = $\frac{|١٢ \times ١ - ٥ \times -٣ - ١|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥}}$

∴ طول العمود = $\frac{|١٢ + ١٥ - ١|}{\sqrt{١٦٩}}$ = $\frac{٢٦}{١٣}$ = ٢ وحدة طول

محيطها = ٢ ط نق = ٢ ط × ٢ = ٤ ط

مساحتها = ط نق^2 = ط × (٢)^2 = ٤ ط

مثـ٨ـال : إثبت أن المستقيمان ٣ س – ٤ ص – ٦ = ٠ ، ٦ س – ٨ ص + ١ = ٠ متوازيان واوجد البعد بينهما

الحـــــل

م$_1$ = $\frac{-٣}{-٤}$ = $\frac{٣}{٤}$ ، م$_2$ = $\frac{-٦}{-٨}$ = $\frac{٣}{٤}$ م$_1$ = م$_2$ المستقيمان متوازيان

لايجاد البعد بينهما نوجد نقطة على أحدهما ثم نوجد البعد بينها وبين المستقيم الاخر

فى المستقيم الاول نضع ص = ٠ نجد ان ٣ س – ٦ = ٠ ٣س = ٦ س = ٢

النقطة (٢ ، ٠) تنتمى للمستقيم الاول نوجد البعد بينها وبين المستقيم الثانى

معادلة المستقيم ل$_2$: ٦ س – ٨ص + ١ = ٠ والنقطة (٢ ، ٠) ∈ ل$_1$

∵ طول العمود = $\frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$ = $\frac{|٦ \times ٢ - ٨ \times ٠ + ١|}{\sqrt{٣٦ + ٦٤}}$

∴ طول العمود = $\frac{|١٢ + ٠ + ١|}{\sqrt{١٠٠}}$ = $\frac{١٣}{١٠}$ = ١,٣ وحدة طول

مثـ٩ـال : إثبت أن المستقيم الذى معادلته ٤ س + ٣ ص + ٢ = ٠ يمس الدائرة التى مركزها (٣ ، ٢) وطول نصف قطرها ٤ سم

الحـــــل

نوجد طول العمود النازل من المركز (٣ ، ٢) على المستقيم ٤ س + ٣ ص +٢ = ٠

∵ طول العمود = $\frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} = \frac{|٤ \times ٣ + ٣ \times ٢ + ٢|}{\sqrt{١٦ + ٩}}$

∴ طول العمود = $\frac{|١٢ + ٦ + ٢|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$ وحدة طول

∵ ع = نق = ٤ ∴ المستقيم يمس الدائرة

مثـ١٠ـال : إثبت أن النقطتين أ(٣ ، ١) ، ب = (−٣ ، ٢) تقعان على جانبين مختلفتين من المستقيم ٣ س − ٤ ص +٦ = ٠ وعلى بعدين متساويين منه

الحـــــــل

نوجد طول العمود الساقط من أ (٣ ، ١) على المستقيم ٣ س − ٤ ص +٦ = ٠

$\text{ع}_1 = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} = \frac{|٩ - ٤ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١١}{٥}$ وحدة طول

نوجد طول العمود الساقط من ب (−٣ ، ٢) على المستقيم ٣ س − ٤ ص +٦ = ٠

$\text{ع}_1 = \frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} = \frac{|-٩ - ٨ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{|-١١|}{٥} = \frac{١١}{٥}$ وحدة طول

المقدار ٣س − ٤ ص +٦ له أشارتين مختلفتين ١١ ، −١١ عند التعويض بالنقطتين

∴ النقطتان فى جهتين مختلفتين من المستقيم وعلى بعدين متساويين منه

مثـ١١ـال :أوجد معادلة المستقيم الذى ميله = $\frac{-٥}{١٢}$ وطول العمود الساقط عليه من النقطة (٢ ، −١) يساوى ٢ وحدة طول .

الحـــــــل

نفرض أن المستقيم ٥ س + ١٢ ص + جـ = ٠ طول العمود ع = ٢

∵ طول العمود = $\frac{|\text{أ س}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{حـ}|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} = \frac{|٥ \times ٢ + ١٢ \times -١ + \text{جـ}|}{\sqrt{٢٥ + ١٤٤}}$

∴ طول العمود = $\frac{|١٠ - ١٢ + جـ|}{\sqrt{١٦٩}}$ = $\frac{|-٢ + جـ|}{١٣}$ = ٢ وحدة طول

جـ − ٢ = ٢٦ أ، جـ − ٢ = −٢٦

جـ = ٢٦+٢ = ٢٨ أ، جـ = −٢٦+٢ = −٢٤

معادلة المستقيم ٥س +١٢ ص +٢٨ = ٠ أ، ٥س +١٢ ص − ٢٤ = ٠

تدريب: أثبت أن المستقيمان ل١ : ٣ س + ٤ ص = ٣ ، ل٢ : الذى يمر بالنقطتين (١ ، − ٢) (− ٣ ، ١) متوازيان ، وأوجد البعد بينهما

الحـــــل

ميل ل١ = ، ميل ل٢ = ، ∵ ∴ المستقيمان

البعد بينهما = طول العمود المرسوم من النقطة (− ٣ ، ١) على المستقيم ٣ س + ٤ ص − ٣ = ٠

= = =

= وحدة طول

تمارين على طول العمود

(١) أوجد طول العمود الساقط من النقطة (٢ ، ١) على المستقيم ٤ س − ٣ ص + ٥ = ٠

(٢) أوجد طول العمود الساقط من النقطة (٣ ، ٢) على المستقيم ٤ س + ٥ = ٠

(٣) أوجد طول العمود من النقطة (ـ٢ , ٥) على المستقيم المار بالنقطة (١ , ٢) وتجه إتجاه (ـ ٤ , ٣)

(٤) أوجد بعد النقطة (١ ، ٥) عن المستقيم الواصل بين النقطتين (٥ ، − ٣) ، (١ ، ٠)

(٥) أوجد بعد النقطة التى تقع فى منتصف المسافة بين النقطتين (٣ ، ٢) ، (− ٤ ، ٦) عن المستقيم ٢ س − ٣ ص + ٥ = ٠

(٦) أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها النقطة (٣ ، – ١) وتمس المستقيم الذى معادلته ٤ س + ٣ ص + ٦ = ٠ ثم أحسب مساحة سطح الدائرة

(٧) أثبت أن المستقيمان ل١ : ٣ س + ٤ ص = ٧ ، ل٢ : ٦ س + ٨ ص + ٦ = ٠ متوازيان ثم أوجد البعد بينهما

(٨) إستخدم طول العمود وأثبت أن (٢,١) , (١,٢) , (٣,٠) على إستقامة واحدة

(٩) أوجد نقطة على محور السينات بحيث يكون بعدها عن المستقيم ٣ س – ٤ ص – ٦ = ٠ مساوياً ٢ وحدة طول

(١٠) أوجد طول نصف قطر الدائرة التى مركزها النقطة (٤ , ـ ١) وتمس المستقيم الذى معادلتة ر = (١ , ١) + ك (١٢ , ٥)

(١١) أوجد نقطة على محور الصادات بحيث يكون بعدها عن المستقيم ١٢ س + ٥ ص + ٩ = ٠ مساوياً ٣ وحدة طول

(١٢) أوجد بعد النقطة (١ ، – ٢) عن المستقيم المار بالنقطة (٢ ، – ٣) والذى يصنع زوايا متساوية مع كل من محورى الإحداثيات

(١٣) هل النقطتان (١ ، ٤) ، (– ٢ ، ٣) تقعان على نفس الجانب من المستقيم ٢ س – ص = ٣ أم على جانبين مختلفين ؟

(١٤) Δ أ ب حـ فيه أ (١ ، ١) ، ب (٥ ، ٢) ، حـ (٧ ، ٥) أوجد :

١ – معادلة $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ٢ – طول العمود المرسوم من أ على $\overleftrightarrow{ب جـ}$

٣ – طول $\overline{ب جـ}$ ٤ – مساحة سطح Δ أ ب حـ

(١٥) أ ثبت أن المستقيمان ر = (٢ , ٣) + ك (٢ , ١) ، ر = (٦ , ٥) + كَ (٦ , ٣) متوازيان وأوجد البعد بينهمـــــا

المعادلة العامة
للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين معلومين

إذا كان ل١ : أ١ س + ب١ ص + حـ١ = ٠ ، ل٢ : أ٢ س + ب٢ ص + حـ٢ = ٠

فإن : المعادلة التى تمثل المستقيم الذى يمر بنقطة تقاطعهما هى :

أ١ س + ب١ ص + حـ١ + ك (أ٢ س + ب٢ ص + حـ٢) = ٠

حيث ك عدد ثابت يمكن إيجاده إذا علم : نقطة واقعة على المستقيم المعلوم أو ميله أو ميل المستقيم الموازى له أو ميل المستقيم العمودى عليه أو ....

مثـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :

٣ س + ٢ ص − ٧ = ٠ ، س + ٣ ص − ٧ = ٠ ، ومار بالنقطة (٣ ، ١)

الحـــــــل

المعادلة المطلوبة هى : (٣ س + ٢ ص − ٧) + ك (س + ٣ ص − ٧) = ٠

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٣ ، ١)

∴ (٣ × ٣ + ٢ × ١ − ٧) + ك (١ × ٣ + ٣ × ١ − ٧) = ٠

∴ ٤ − ك = ٠ ∴ ك = ٤ ، بالتعويض فى المعادلة المطلوبة :

∴ (٣ س + ٢ ص − ٧) + ٤ (س + ٣ ص − ٧) = ٠

∴ المعادلة المطلوبة هى : س + ٢ ص − ٥ = ٠

حل آخـــــــــر

بوضع : ٣ س + ٢ ص = ٧ (١)

، س + ٣ ص = ٧ (٢) بالضرب × ٣

∴ ٣ س + ٩ ص = ٢١

٣ س + ٢ ص = ٧ بالطرح

٧ ص = ١٤ ∴ ص = ٢

بالتعويض فى (١) ينتج : س = ١ ∴ المستقيم يمر بالنقطتين (١ ، ٢) ، (٣ ، ١)

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{١ - ٢}{٣ - ١}$ = $\frac{-١}{٢}$

∴ المعادلة المطلوبة هى : ص − ١ = $\frac{-١}{٢}$ (س − ٣)

أى : س + ٢ ص − ٥ = ٠

مثـ٢ـال : أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ل١ : ٢ س + ص = ١١

، ل٢: ر = (٧ ، ١) + ك (١ ، − ١) ويوازى المستقيم ٤ س − ٧ ص + ١ = ٠

الحـــــــل

ل٢ معادلته : (ص − ص١) = م (س − س١)

(ص − ١) = − ١ (س − ٧) ∴ س + ص = ٨

نوجد نقطة تقاطع المستقيمين ٢ س + ص = ١١ (١)

س + ص = ٨ (٢)

بطرح المعادلتين ∴ س = ٣

بالتعويض فى (٢) ⟸ ٣ + ص = ٨ ∴ ص = ٥

نقطة التقاطع (٣ ، ٥) م$_{الموازى}$ = $\frac{٤}{٧}$ م$_{المطلوب}$ = $\frac{٤}{٧}$

∴ المعادله المطلوبة : (ص − ص١) = م (س − س١)

(ص − ٥) = $\frac{٤}{٧}$ (س − ٣) نضرب × ٧

∴ ٧ ص − ٣٥ = ٤ س − ١٢ ∴ المعادلة المطلوبة هى : ٤ س − ٧ ص + ٢٣ = ٠

مثـ٣ـال : أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين

٢ س + ص = ١١ ، س − ص = ١ وعمودى على المستقيم ٣ س − ٥ ص + ١ = ٠

الحـــــــل

نوجد نقطة تقاطع المستقيمين ٢ س + ص = ١١ (١) ،، س − ص = ١ (٢)

بجمع المعادلتين ∴ ٣س = ١٢ ∴ س = ٤

بالتعويض فى (١) ∴ ٨ + ص = ١١ ∴ ص = ٣

نقطة تقاطع المستقيمين (٤ ، ٣) ، $م_{العمودى} = \frac{٣}{٥}$ $م_{المطلوب} = \frac{-٥}{٣}$

∴ المعادله المطلوبة : (ص − ص١) = م (س − س١)

(ص − ٣) = $\frac{-٥}{٣}$ (س − ٤) نضرب × ٣

∴ ٣ ص − ٩ = −٥ س + ٢٠ ∴ المعادلة المطلوبة هى : ٣ س + ٥ ص −٢٩ = ٠

مثـــ٤ـــال : أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين ٢ س + ص = ٧ ، س + ٢ ص = ٨ وبالنقطة (٥ ، ٤)

الحـــــل

المعادلة المطلوبة هى : (٢ س + ص − ٧) + ك (س + ٢ ص − ٨) = ٠

، ∵ المستقيم يمر بالنقطة (٥ ، ٤)

∴ (٢ × ٥ + ١ × ٤ − ٧) + ك (١ × ٥ + ٢ × ٤ − ٨) = ٠

∴ ٧ + ٥ ك = ٠ ∴ ك = $\frac{-٧}{٥}$ ، بالتعويض فى المعادلة المطلوبة :

∴ (٢ س + ص − ٧) + $\frac{-٧}{٥}$ (س + ٢ ص − ٨) = ٠ × ٥

١٠ س + ٥ ص − ٣٥ − ٧ س − ١٤ ص + ٥٦ = ٠

∴ ٣ س − ٩ ص + ٢١ = ٠ المعادلة المطلوبة هى : س − ٣ ص + ٧ = ٠

مثـــ٥ـــال : أوجد طول العمود النازل من نقطة تقاطع المستقيمين س+ص=٥ ، س − ص = ١ على المستقيم ٨س +٦ ص + ٥ = ٠

الحـــــل

نوجد أولا نقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٥ (١)

س − ص = ١ (٢)

بالجمع ٢ س = ٦ ∴ س = ٣ بالتعويض ∴ ص = ٢

نوجد طول العمود النازل من النقطة (٣ ، ٢) على المستقيم ٨س+٦ص +٥ = ٠

$\frac{|٨(٣) + ٦(٢) + ٥|}{\sqrt{٦٤+٣٦}} = \frac{|٢٤ + ١٢ + ٥|}{\sqrt{١٠٠}} = \frac{٤١}{١٠}$ = ٤.١ وحدة طولية

تمارين على طول العمود

(١) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س + ٢ ص = ٥ ، ٣ س + ٤ ص = ١١ و بالنقطة (٣ ، – ١)

(٢) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س + ص = ٢ ، ٣ س + ٥ ص = ٨ ويوازى المستقيم ٢ س – ص = ٤

(٣) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : س – ٢ ص + ٥ = ٠ ، ص = ٢ س + ١ وعمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٠ ، ٢) ، (٣ ، ٠)

(٤) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س – ص = ٨ ، س + ٢ ص – ٥ = ٠ ويوازى محور السينات

(٥) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ٣ ص = ٠ ، ٣ س – ٢ ص = ٣ ويوازى محور الصادات

(٦) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ص = ٢ ، ٤ س + ٣ ص – ٣ = ٠ ويمر بنقطة الأصل

(٧) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س – ٢ ص = ٢ ، ٥ س + ٢ ص = ٣ وميله يساوى ٢

(٨) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل و يمر بنقطة تقاطع المستقيمين : س = ٣ ، ص = ٤

(٩) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س – ٧ ص + ٩ = ٠ ، ٣ س + ٢ ص – ٤ = ٠ وعمودى على المستقيم الأول

(١٠) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ٣ ص – ٢ = ٠ ،
٣ س – ص – ١٤ = ٠ والذى يصنع مع الإتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ١٣٥°

(١١) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س + ص – ١ = ٠ ،
س – ص + ٣ = ٠ ويقطع من محور الصادات السالب جزءاً طوله ٣ وحدات

(١٢) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س – ٤ ص + ١ = ٠ ،
٥ س + ص – ١ = ٠ ويقطع جزأين متساويين من المحورين الموجبين

(١٣) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين : ٢ س – ٣ ص + ٨ = ٠ ،
٣ س + ٢ ص – ١ = ٠ وميله موجب ويصنع مع محورى الإحداثيات مثلثاً مساحة سطحه تساوى ٤ وحدات مربعة