المنهج الجديد

الهندسة الفراغية

للثانوية العامة

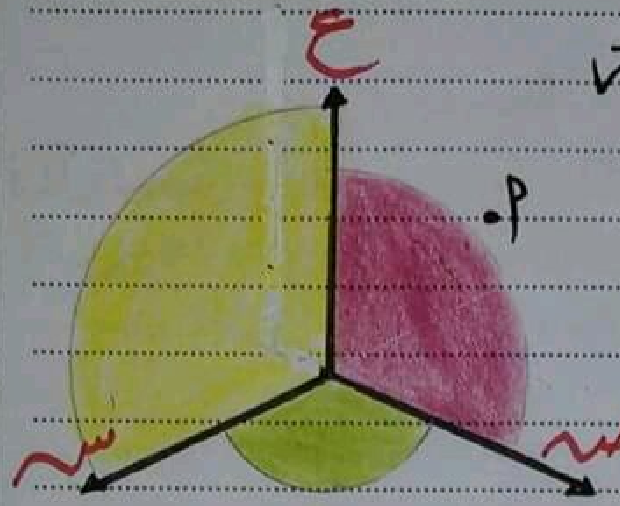
اعداد

أشرف حسن عبده

بنها ٠١٢٢٧٢٧٨٠٨٤

النظام الإحداثي المتعامد في ثلاثة أبعاد ($ح^٣$)

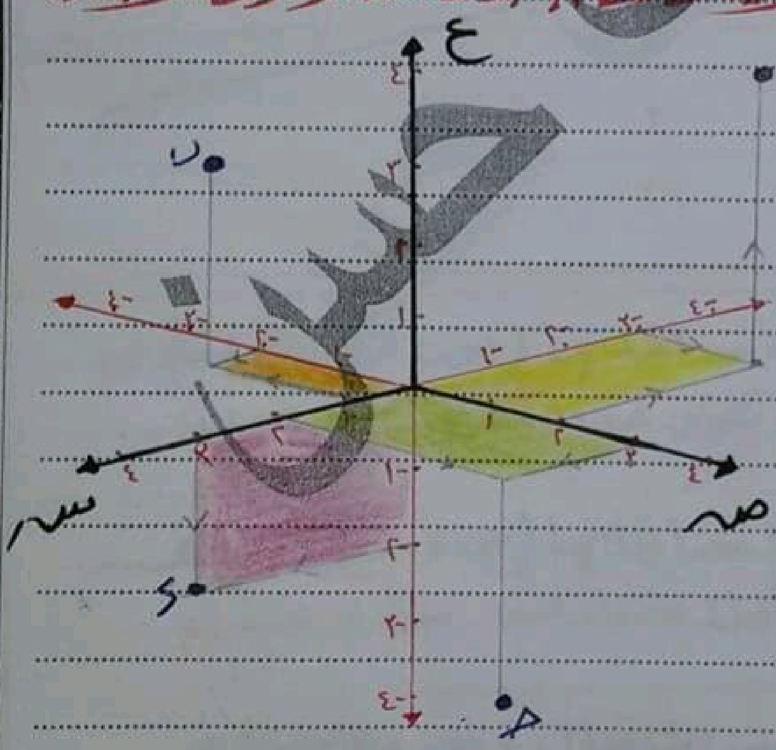
إحداثيات نقطة في الفراغ



يمكن تعيين إحداثيات النقطة
أ (س، ص، ع)
في الفراغ وذلك بإيجاد مسقط هذه النقطة على كل محور من ثلاثة محاور متقاطعة في نقطة ومتعامدة

ملحوظة: يجب اتباع قاعدة اليد اليمنى

مثال: عين موضع النقط الآتية في نظام إحداثي متعامد ثلاثي الأبعاد:



أ (-٣، ٢، ٤)

ب (١، -٢، ٣)

جـ (٢، ٣، -٤)

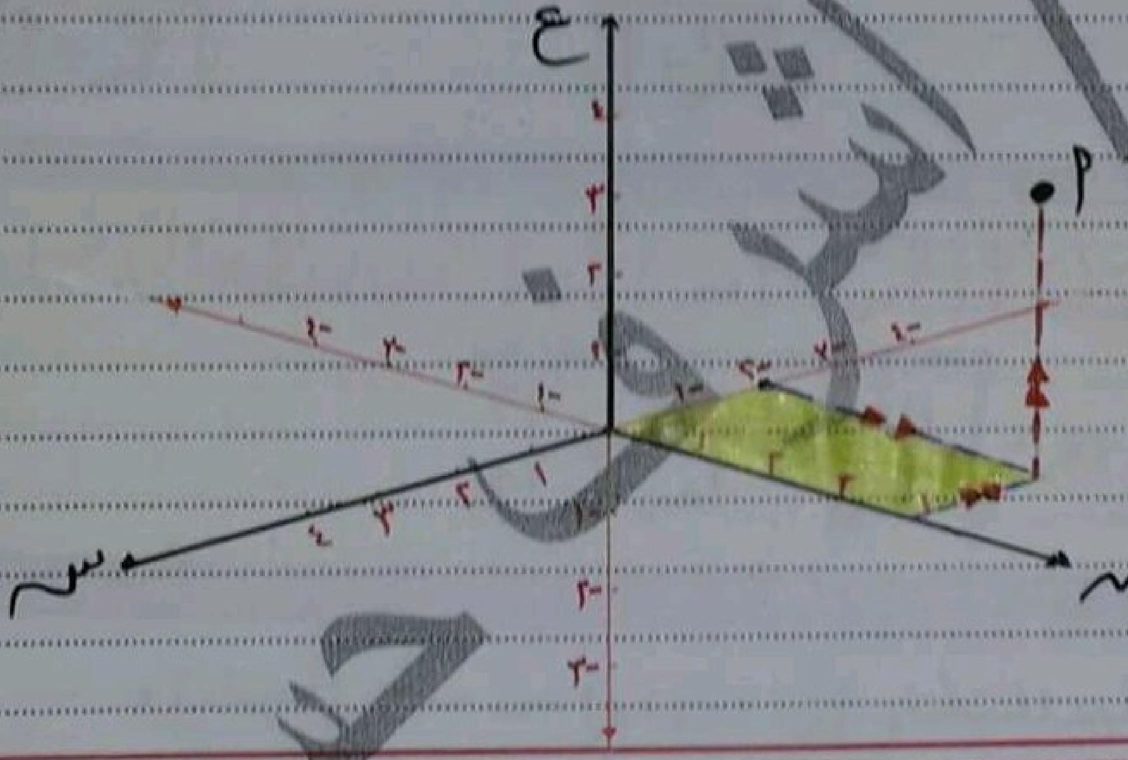
د (٣، ٠، -٢)

تفسير كيف تعيين النقطة أ (-٢، ٤، ٣)

من نظام احداثي متعامد ثلاثي الأبعاد

أ (-٢ ، ٤ ، ٣)

* نقف عند -٢ على محور السينات
* نمشي ٤ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور الصادات
* ومنها نمشي ٣ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور ع



* جميع النقط في الفراغ التي احداثياتها (س ، ص ، ٠) تقع في المستوى الاحداثي س ص وتكون معادلته ع = صفر
* جميع النقط في الفراغ التي احداثياتها (س ، ٠ ، ع) تقع في المستوى الاحداثي س ع وتكون معادلته ص = صفر
* جميع النقط في الفراغ التي احداثياتها (٠ ، ص ، ع) تقع في المستوى الاحداثي ص ع وتكون معادلته س = صفر

ملحوظات هامة :

بُعد النقطة أ (أس، أص، أع) عن محور

س	ص	ع
$= \sqrt{\text{أ}_{\text{ص}}^{2} + \text{أ}_{\text{ع}}^{2}}$	$= \sqrt{\text{أ}_{\text{س}}^{2} + \text{أ}_{\text{ع}}^{2}}$	$= \sqrt{\text{أ}_{\text{س}}^{2} + \text{أ}_{\text{ص}}^{2}}$

بُعد النقطة أ (أس، أص، أع) عن نقطة الأصل

$$= \sqrt{\text{أ}_{\text{س}}^{2} + \text{أ}_{\text{ص}}^{2} + \text{أ}_{\text{ع}}^{2}}$$

تأمل

1. بُعد النقطة أ (٢، -٣، ٤) عن محور السينات = ...
2. بُعد النقطة أ (٣، ٠، -١) عن محور الصادات = ...
3. بُعد النقطة أ (-٥، ٢، ٠) عن محور السينات = ...
4. بُعد النقطة أ (-١، -٣، ٢) عن محور ع = ...
5. بُعد النقطة أ (٢، ٣، ٤) عن نقطة الأصل = ...

ملحوظة : نقطة الأصل و (٠، ٠، ٠)

بُعد النقطة أ(أ$_{س}$ ، أ$_{ص}$ ، أ$_{ع}$) عن المستوى

س ص	ص ع	ع س
= |أ$_{ع}$|	= |أ$_{س}$|	= |أ$_{ص}$|

أكمل ① بُعد النقطة أ(-١ ، ٢ ، ٣) عن المستوى س ص = ...

② بُعد النقطة أ(٤ ، -٢ ، ١) عن المستوى ص ع = ...

③ بُعد النقطة أ(٣ ، -١ ، ٢) عن المستوى س ع = ...

④ بُعد النقطة (٦ ، ٤ ، ٢) عن المستوى ص ع = ...

⑤ إذا كانت النقطة أ(٣ ، هـ ، ٢) تبعد ٤ وحدات عن المستوى س ع فإن هـ = ... أو ......

⑥ إذا كانت النقطة أ(ك+٢ ، ٠ ، -١) تبعد ٥ وحدات عن المستوى ص ع فإن ك = ... أو ..... ويكون بُعد النقطة أ عن محور ع = ...

البعد بين نقطتين فى الفراغ

اذا كان أ (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) ، ب (س$_2$، ص$_2$، ع$_2$) نقطتين فى الفراغ فإن البعد بينهما:

$$\text{أب} = \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2 + (\text{ع}_2 - \text{ع}_1)^2}$$

أكمل:

1) اذا كان أ(-٣، ٢، ٤)، ب(٥، ١، ٨) فإن أب = ...

2) اذا كان أ(٢، -١، ٣)، ب(-١، ٣، ٣) فإن أب = ...

3) البعد بين أ(٥، -١، ٢) ونقطة الأصل = ...

4) اثبت أن △ أب جـ قائم الزاوية فى جـ حيث أ(٢، -١، ٣)، ب(-٤، ٤، ٢)، جـ(-٢، ٥، ١) وأوجد مساحته

5) اثبت أن النقط أ(٤، ٤، ٠)، ب(٤، ٠، ٤)، جـ(٠، ٤، ٤) رؤوس △ متساوى الأضلاع واوجد مساحته ومحيطه

6) اثبت أن النقط أ(٧، ١، ٣)، ب(٥، ٣، ل)، جـ(٣، ٥، ٣) تكون △ متساوى الساقين لجميع قيم ل الحقيقية، ثم اوجد قيمة (قيم) ل التى تجعل المثلث متساوى الأضلاع.

بُعد النقطة ($أ_{س}$ ، $أ_{ص}$ ، $أ_{ع}$) عن

أ. أشرف حسن لمبه

المحور

س	ص	ع
$\sqrt{أ_{ص}^2 + أ_{ع}^2}$	$\sqrt{أ_{ع}^2 + أ_{س}^2}$	$\sqrt{أ_{س}^2 + أ_{ص}^2}$

المستوى

س ص	ص ع	ع س
$\|أ_{ع}\|$	$\|أ_{س}\|$	$\|أ_{ص}\|$

أي نقطة ($ب_{س}$ ، $ب_{ص}$ ، $ب_{ع}$)

$$\sqrt{(أ_{س} - ب_{س})^2 + (أ_{ص} - ب_{ص})^2 + (أ_{ع} - ب_{ع})^2}$$

احداثي نقطة منتصف قطعة مستقيمة

$$\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} ، \frac{ع_1 + ع_2}{2} \right)$$

احداثي أحد طرفي قطعة مستقيمة بمعلومية المنتصف

= ٢ × نقطة المنتصف − (الطرف المعلوم)

إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة

إذا كان أ (س١، ص١، ع١) ، ب (س٢، ص٢، ع٢) فإن احداثى نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ =

$$\left(\frac{\text{س}_1+\text{س}_2}{2} ، \frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2}{2} ، \frac{\text{ع}_1+\text{ع}_2}{2}\right)$$

لإيجاد احداثى نقطة طرف القطعة المستقيمة بمعلومية الطرف الآخر ونقطة المنتصف

احداثى طرف القطعة = ٢ × المنتصف − إحداثى الطرف المعلوم

أكمل ① اذا كان أ (٠، ٤، −٢) ، ب (−٦، ٣، ٤) فإن احداثى منتصف أب = ...

② اذا كان أ (١، −٣، ٢) ، ب (٤، −١، ٤) وكان أ جـ = جـ ب فإن جـ = ...

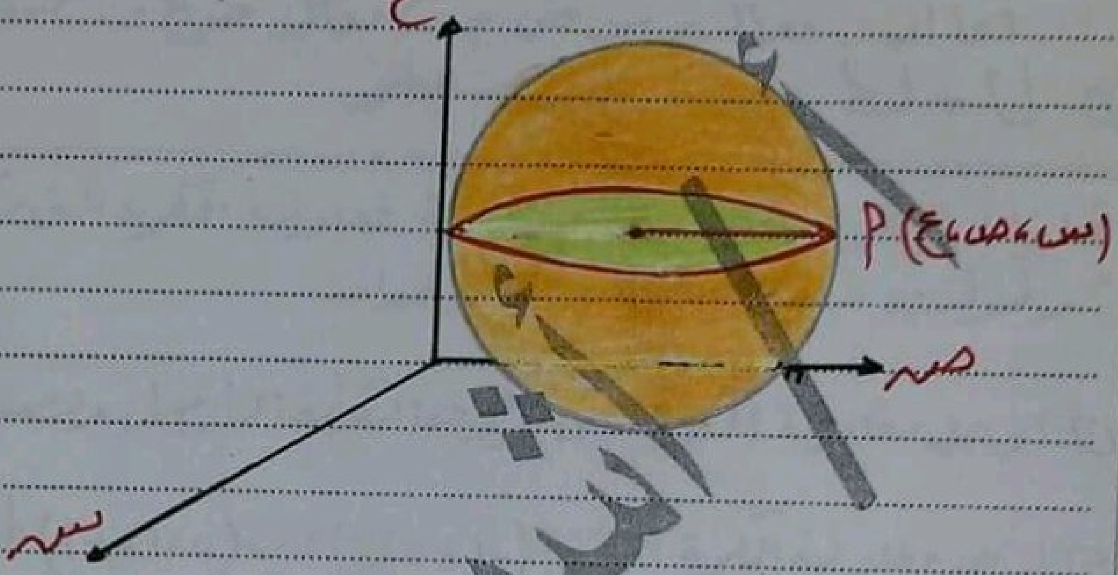
③ اذا كانت ب (−١، ٤، ٢) منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ حيث أ (١، ٠، ٢) فإن جـ = ...

④ اذا كانت جـ (−١، ٤، ٠) منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث ب (٤، −٢، ١) فإن أ = ...

⑤ اذا كان أ ب جـ مثلث Δ حيث أ (٢، −١، ٣) ، ب (−٤، ٤، ٢) ، جـ (−٢، ٥، ١) اوجد احداثى نقطة تقاطع متوسطاته.

الحل م = $\left(\frac{\text{س}_1+\text{س}_2+\text{س}_3}{3} ، \frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2+\text{ص}_3}{3} ، \frac{\text{ع}_1+\text{ع}_2+\text{ع}_3}{3}\right)$

معادلة الكرة فى الفراغ



إذا كانت النقطة (س، ص، ع) تقع على كرة مركزها (ل، ك، ن)

فإن البعد بينهما يكون $\sqrt{(س-ل)^2+(ص-ك)^2+(ع-ن)^2} = نق$

معادلة الكرة (الصورة القياسية)

$$(س-ل)^2+(ص-ك)^2+(ع-ن)^2 = نق^2$$

المعادلة العامة للكرة

$$س^2+ص^2+ع^2+2ل\,س+2ك\,ص+2ن\,ع+د=0$$

مركزها $\left(-\frac{1}{2}\text{معامل س}،\ -\frac{1}{2}\text{معامل ص}،\ -\frac{1}{2}\text{معامل ع}\right)$

$$نق = \sqrt{ل^2+ك^2+ن^2-د} > \text{صفر}$$

ملحوظات على الصورة العامة لمعادلة الكرة في الفراغ

① معامل س² = معامل ص² = معامل ع² = ١
② المعادلة من الدرجة الثانية في س ، ص ، ع
③ خالية من الحد الذي يحتوي س ص ، ص ع ، ع س
أي أن معامل س ص = ٠ ، معامل ص ع = ٠ ، معامل ع س = ٠
④ ل² + ك² + ن² − د > صفر

تمارين ① اوجد الصورة القياسية لمعادلة الكرة التي مركزها (٢، −١، ٤) وطول نصف قطرها ٣ وحدات

② اوجد معادلة الكرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ٥ وحدات

③ اوجد معادلة الكرة التي أ(−١، ٥، ٤) ، ب(٥، ١، −٢) طرفي القطر أب

* نوجد مركزها (٢، ٣، ١)

الحل * نوجد نق : البعد بين المركز ونقطة أ أو نقطة ب

$$= \sqrt{(٢+١)^٢ + (٣-٥)^٢ + (١-٤)^٢} = \sqrt{٢٢}$$

∴ معادلة الكرة = $(س-٢)^٢ + (ص-٣)^٢ + (ع-١)^٢ = ٢٢$

④ اوجد معادلة الكرة التي أب قطر فيها حيث أ(−١، ٤، ٢) ، ب(٣، −٢، ٦)

⑤ اوجد مركز ونصف قطر الكرة معادلتها س² + ص² + ع² + ٤س − ٢ص − ٦ع + ١١ = ٠

يجب أن يكون المعادلة على الصورة العامة

الحل م = (−½ معامل س ، −½ معامل ص ، −½ معامل ع)

م = (−٢، ١، ٣)

$$نق = \sqrt{(-٢)^٢ + (١)^٢ + (٣)^٢ - ١١} = \sqrt{٣}$$ وحدة طول

المتجهات فى الفراغ

١) متجه الموضع فى الفراغ : $\vec{\text{أ}}(\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ هو

القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل ونهايتها أ

٢) معيار المتجه : طول القطعة المستقيمة الموجهة التى تمثل المتجه

$$\|\vec{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{أ}_{\text{س}}^2 + \text{أ}_{\text{ص}}^2 + \text{أ}_{\text{ع}}^2}$$

٣) لاحظ أن $\text{أ}_{\text{س}}$: مركبة $\vec{\text{أ}}$ فى اتجاه محور س وهكذا $\text{أ}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}}$

٤) جمع متجهين فى الفراغ : $\text{أ}(\text{أ}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}})$ ، $\text{ب}(\text{ب}_{\text{س}} ، \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{ب}_{\text{ع}})$

$$\text{أ} + \text{ب} = (\text{أ}_{\text{س}} + \text{ب}_{\text{س}} ، \text{أ}_{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ص}} ، \text{أ}_{\text{ع}} + \text{ب}_{\text{ع}})$$

٥) تعميم : يمكن جمع أكثر من متجهين

٦) يتساوى المتجهين فى الفراغ اذا كان :

$\text{أ}_{\text{س}} = \text{ب}_{\text{س}}$ ، $\text{أ}_{\text{ص}} = \text{ب}_{\text{ص}}$ ، $\text{أ}_{\text{ع}} = \text{ب}_{\text{ع}}$

٧) متجه الوحدة : هو المتجه الذى معياره = ١

٨) متجهات الوحدة الأساسية : $\vec{\text{س}} = (١ ، ٠ ، ٠)$

$\vec{\text{ص}} = (٠ ، ١ ، ٠)$ ، $\vec{\text{ع}} = (٠ ، ٠ ، ١)$

$$\vec{\text{أ}} = \text{أ}_{\text{س}}\vec{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\vec{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\vec{\text{ع}}$$

⑨ التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة من الفراغ بدلالة احداثيات طرفيها

$$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$$

⑩ متجه الوحدة في اتجاه معلوم

$$\overrightarrow{\text{ي}}_{\text{أ}} = \frac{\text{المتجه}}{\text{معياره}} = \frac{\overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$$

$$\overrightarrow{\text{ي}}_{\text{أب}} = \frac{\overrightarrow{\text{أب}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|} = \frac{\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|}$$

⑪ زوايا الاتجاه لمتجه في الفراغ

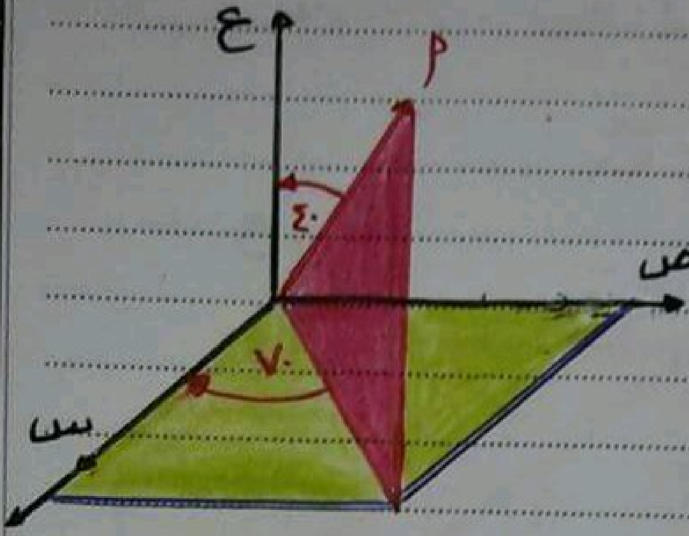
اذا كان $\text{هـ}_{\text{س}}$ ، $\text{هـ}_{\text{ص}}$ ، $\text{هـ}_{\text{ع}}$ قياسات الزوايا التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب للمحاور س ، ص ، ع فإن:

$$\text{أ}_{\text{س}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \text{هـ}_{\text{س}} \quad ، \quad \text{أ}_{\text{ص}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \text{هـ}_{\text{ص}} \quad ، \quad \text{أ}_{\text{ع}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \text{هـ}_{\text{ع}}$$

الصورة الجبرية (الكارتيزية) للمتجه هي:

$$\overrightarrow{\text{أ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \text{هـ}_{\text{س}} \overrightarrow{\text{س}} + \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \text{هـ}_{\text{ص}} \overrightarrow{\text{ص}} + \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \text{ جتا } \text{هـ}_{\text{ع}} \overrightarrow{\text{ع}}$$

فلكي: $\text{جتا } \text{هـ}_{\text{س}} = \frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$ ، $\text{جتا } \text{هـ}_{\text{ص}} = \frac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$ ، $\text{جتا } \text{هـ}_{\text{ع}} = \frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$



مثال : من الشكل المقابل

متجه $\overline{أ}$ معياره ١٠ وحدات

* عبر عن المتجه $\overline{أ}$ بالصورة الجبرية (الكارتيزية)

* أوجد قياسات زوايا الاتجاه له

الحل

١- نحلل المتجه $\overline{أ}$ إلى مركبتين متعامدتين أحدهما في اتجاه $\overline{وع}$ الذي يصنع معه زاوية $\theta_{ع} = ٤٠^\circ$ والأخرى في اتجاه مستوى عمودي على $\overline{وع}$ وهو المستوى س ص

$أ_{ع} = \|\overline{أ}\| \text{ جتا } \theta_{ع} = ١٠ \times \text{ جتا } ٤٠ = ٧٫٦٦$

$أ_{س ص} = \|\overline{أ}\| \text{ جا } \theta_{ع} = ١٠ \times \text{ جا } ٤٠ = ٦٫٤٢٨$

٢- نأخذ $أ_{س ص}$ ونحلله إلى مركبتين متعامدتين أحدهما في اتجاه $\overline{وس}$ والأخرى في الاتجاه العمودي $\overline{وص}$ حيث $\overline{أ}$ يصنع في المستوى مع $\overline{وس}$ زاوية في المستوى س ص $= ٧٠^\circ$

$أ_{س} = أ_{س ص} \text{ جتا } ٧٠ = ٦٫٤٢٨ \text{ جتا } ٧٠ = ٢٫١٩٩$

$أ_{ص} = أ_{س ص} \text{ جا } ٧٠ = ٦٫٤٢٨ \text{ جا } ٧٠ = ٦٫٠٤$

٣- الصورة الكارتيزية $\overline{أ} = أ_{س} \overline{س} + أ_{ص} \overline{ص} + أ_{ع} \overline{ع}$

$\overline{أ} = ٢٫١٩٩ \overline{س} + ٦٫٠٤ \overline{ص} + ٧٫٦٦ \overline{ع}$

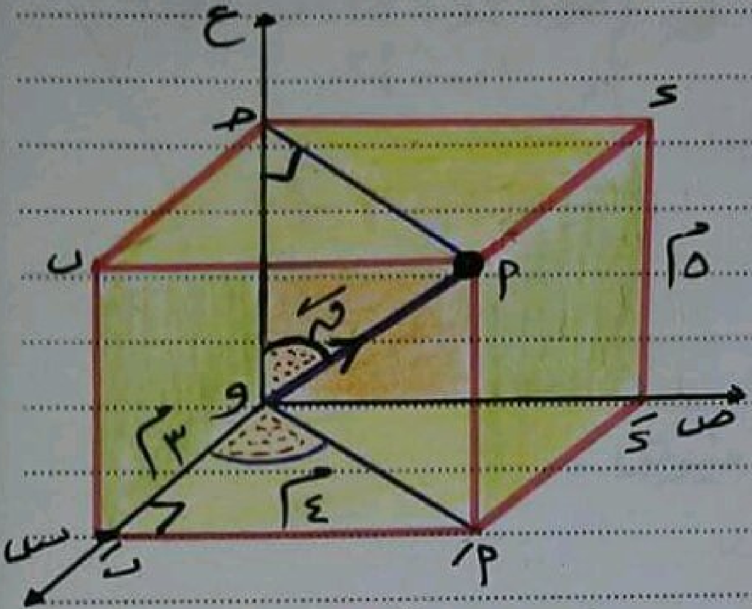
٤- قياسات زوايا الاتجاه للمتجه:

$\text{جتا } \theta_{س} = \frac{أ_{س}}{\|\overline{أ}\|} = \frac{٢٫١٩٩}{١٠}$ $\therefore \theta_{س} = ٧٧٫٣^\circ$ بالمثل $\theta_{ص} = ٥٢٫٨٤^\circ$

$\theta_{ع} = ٤٠^\circ$

مثال: الشكل المقابل يمثل قوة مقدارها ٢٠٠ نيوتن

* عبر عن القوة ق بالصورة الجبرية
* أوجد قياسات زوايا الاتجاه للقوة ق



الحل

إستراتيجية الحل

* نوجد معيار المتجه $\overrightarrow{م}$
* قياسات الزوايا

$\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$

* تعين نقطة م (٣، ٤، ٥) ، حـ (٠، ٠، ٥)

$\| \overrightarrow{م} \| = \sqrt{٣^2 + ٤^2 + ٥^2} = ٥\sqrt{٢}$ ← طول $\overline{وم}$

$\| \overrightarrow{حـ} \| = \sqrt{٠^2 + ٠^2 + ٥^2} = ٥$ ← طول $\overline{وحـ}$

في Δ م و حـ القائم في حـ ← م حـ = ٥ سم

$\theta_{ع}$ ← ظا(م و حـ) = $\frac{٥}{٥}$ = ١ ← $\theta_{ع} = ٤٥^\circ$

* تحليل القوة ق إلى مركبتين متعامدتين [بإتجاه وع ، في إتجاه المستوى س ص]

$ق_{ع} = \|ق\|$ جتا $\theta_{ع}$ = ٢٠٠ × جتا ٤٥ = $١٠٠\sqrt{٢}$ نيوتن

$ق_{س ص} = \|ق\|$ جا $\theta_{ع}$ = ٢٠٠ × جا ٤٥ = $١٠٠\sqrt{٢}$ نيوتن

تابع ←

نحلل $\overrightarrow{ق}_{س ص}$ الى مركبتين متعامدتين [الاولى في اتجاه $\overrightarrow{و س}$ والاخرى في اتجاه $\overrightarrow{و ص}$]

في Δ أ و ب القائم في ب
حيث أ و = ٥ سم، و ب = ٣ سم،
أ ب = ٤ سم

∴ جتا أ و ب = $\frac{٣}{٥}$

جا أ و ب = $\frac{٤}{٥}$

$ق_{س} = ق_{س ص}$ جتا أ و ب

= $١٠٠\sqrt{٢} \times \frac{٣}{٥} = ٦٠\sqrt{٢}$ نيوتن

$ق_{ص} = ق_{س ص}$ جا أ و ب

= $١٠٠\sqrt{٢} \times \frac{٤}{٥} = ٨٠\sqrt{٢}$ نيوتن

∴ الصورة الجبرية للقوة ق

$\overrightarrow{ق} = ق_{س}\overrightarrow{س} + ق_{ص}\overrightarrow{ص} + ق_{ع}\overrightarrow{ع}$

$= ٦٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{س} + ٨٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{ص} + ١٠٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{ع}$

* قياسات الزوايا

جتا $\theta_{س} = \frac{ق_{س}}{\|ق\|} = \frac{٦٠\sqrt{٢}}{٢٠٠}$ ∴ $\theta_{س} = ٦٤° \; ٥٣' \; ٤٥''$

بالمثل $\theta_{ص} = ٥٥° \; ٣٣'$ ، $\theta_{ع} = ٤٥°$

تمرين (١) مجموع تمام زوايا الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{أ}$ (-٢، ١، ٢) هي ......

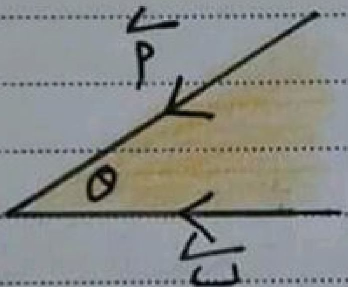
(٢) اذا كانت ٣٠°، ٦٠°، $\theta_{ص}$ زوايا الاتجاه لمتجه فإن θ = ...

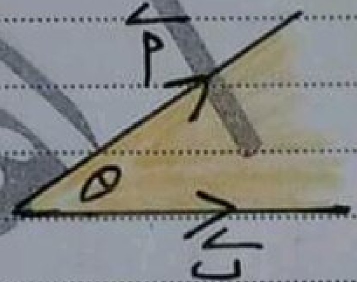
$جتا^{٢}\theta_{س} + جتا^{٢}\theta_{ص} + جتا^{٢}\theta_{ع} = ١$

ضرب المتجهات

الثلاثي القياسي	الضرب الاتجاهي	الضرب القياسي
$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{جـ}}$	$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$	$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

١ الضرب القياسي





الضرب القياسي لمتجهين إما خارجين من نقطة واحدة
او خارجيا من نقطة واحدة
قياس الزاوية بين المتجهين $\in [\,٠ ، \pi\,]$

$$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\| \text{ جتا هـ}$$

= مساحة المستطيل الذى بعداه (طوله وعرضه) معيار أحد المتجهين ومركبة المتجة الآخر عليه

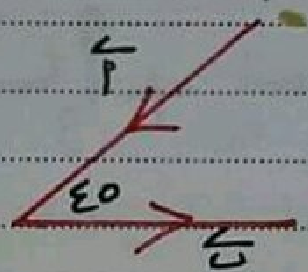
- مركبة $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$ = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا هـ
- مركبة $\overrightarrow{\text{ب}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جتا هـ

مساحة المستطيل = $|\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}|$

مثال ١: اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين ، قياس الزاوية بينهما ٦٠° اوجد

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$ اذا كان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٢$ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = ٨$

الحل



مثال ٢: من الشكل المقابل

اذا كان $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٦$ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = ١٠$

وقياس الزاوية الموضحة = ٤٥°

اوجد $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

الحل

تمرين ٣: اكمل اذا كان $\overrightarrow{\text{س}}$ ، $\overrightarrow{\text{ص}}$ ، $\overrightarrow{\text{ع}}$ متجهات وحدة يمينية فإن

① $\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{س}} =$ ④ $\overrightarrow{\text{س}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}} =$

② $\overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ص}} =$ ⑤ $\overrightarrow{\text{ص}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}} =$

③ $\overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{ع}} =$ ⑥ $\overrightarrow{\text{ع}} \cdot \overrightarrow{\text{س}} =$

تمرين ٤: أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٨ سم

اوجد:

$\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{بجـ}} =$

$\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{دجـ}} =$

$\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـأ}} =$

$\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{دجـ}} =$

$\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{جـد}} =$

$\overrightarrow{\text{أجـ}} \cdot \overrightarrow{\text{بد}} =$

* متى يكون حاصل الضرب القياسي منعدم؟

الضرب القياسي لمتجهين فى النظام الاحداثى المتعامد

اذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{أ}_{\text{س}}\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\,\overrightarrow{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\,\overrightarrow{\text{ع}})$

$\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{ب}_{\text{س}}\,\overrightarrow{\text{س}} + \text{ب}_{\text{ص}}\,\overrightarrow{\text{ص}} + \text{ب}_{\text{ع}}\,\overrightarrow{\text{ع}})$

فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \text{أ}_{\text{س}}\,\text{ب}_{\text{س}} + \text{أ}_{\text{ص}}\,\text{ب}_{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ع}}\,\text{ب}_{\text{ع}}$

الزاوية بين متجهين غير صفريين

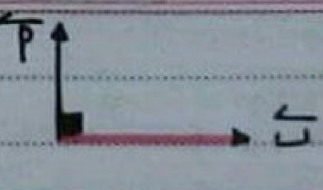
$$\text{جتا}\,\theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

، $0 \le \theta \le 180$

$\theta = 180$ ، جتا $\theta = -1$

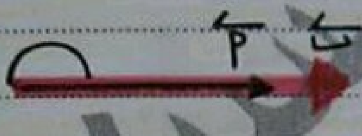
المتجهان متوازيان وفى اتجاهين متضادين
(على استقامة واحدة)

$\theta = 90$ ، جتا $\theta = 0$



المتجهان متعامدان

$\theta = 0$ ، جتا $\theta = 1$



المتجهان متوازيان وفى اتجاه واحد
(متطابقين)

مركبة $\overrightarrow{\text{أ}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ب}}$
(مسقط)

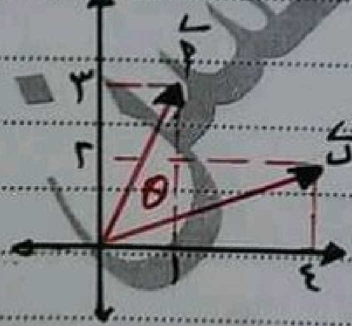
$$\text{أ}_{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|\ \text{جتا}\,\theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{ب}}\|}$$

مثال ٥: اذا كان $\vec{أ}$ = ٣ $\vec{س}$ + ٢ $\vec{ص}$ + $\vec{ع}$ ، $\vec{ب}$ = − $\vec{س}$ − ٢ $\vec{ص}$ + $\vec{ع}$
اوجد $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$

مثال ٦: اذا كان $\vec{أ}$ = (−١ ، ٣ ، ٠) ، $\vec{ب}$ = ٢ $\vec{س}$ − ٥ $\vec{ص}$ + $\vec{ع}$
اوجد $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$

مثال ٧: اذا كان $\vec{أ}$ = ٥ $\vec{س}$ − ٢ $\vec{ص}$ ، $\vec{ب}$ = (١ ، ٣) أوجد $\vec{أ} \cdot \vec{ب}$

مثال ٨: اوجد قياس الزاوية بين المتجهين $\vec{أ}$ = (٤ ، ٣ ، ٧)
، $\vec{ب}$ = ٢ $\vec{س}$ + ٥ $\vec{ص}$ + ٤ $\vec{ع}$
الحل



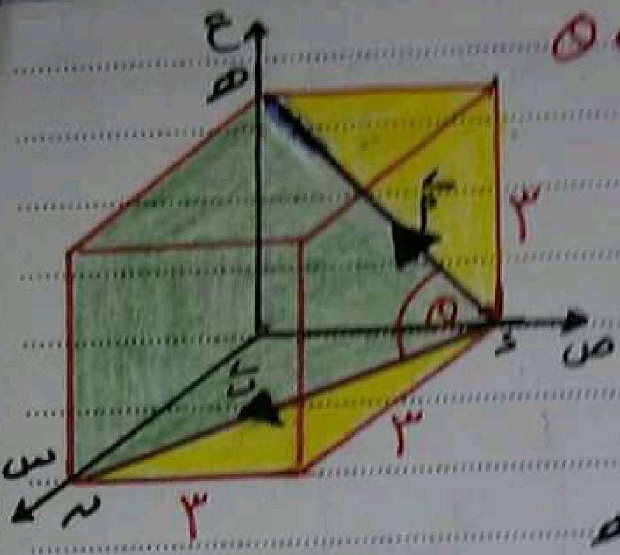
مثال ٩: من الشكل المقابل اوجد θ
الحل
نحدد احداثيات كل من $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$

$\vec{أ}$ = (١ ، ٣) ⟸ $\|\vec{أ}\|$ = $\sqrt{(١)^2 + (٣)^2}$ = $\sqrt{١٠}$

$\vec{ب}$ = (٤ ، ٢) ⟸ $\|\vec{ب}\|$ = $\sqrt{(٤)^2 + (٢)^2}$ = $\sqrt{٢٠}$

∴ جتا θ = $\frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{\|\vec{أ}\| \, \|\vec{ب}\|}$ = $\frac{١ \times ٤ + ٣ \times ٢}{\sqrt{١٠} \times \sqrt{٢٠}}$ = $\frac{١٠}{١٠\sqrt{٢}}$ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ θ = ٤٥°

مثال ٧: من الشكل المقابل أوجد قياس ه



الحل

الشكل المقابل مكعب أبعاده هي

٣ ، ٣ ، ٣

نحدد إحداثي طرفي المتجه $\vec{أ}$

من محور ص ← = (٠، ٣، ٠) = د

من محور ع ← = (٠، ٠، ٣) = هـ

∴ $\vec{أ}$ = $\vec{دهـ}$ = هـ − د = (٠، ٠، ٣) − (٠، ٣، ٠) = (٠، −٣، ٣)

∴ ‖$\vec{أ}$‖ = $\sqrt{(٠)^٢ + (−٣)^٢ + (٣)^٢}$ = ٣$\sqrt{٢}$

نحدد إحداثي طرفي المتجه $\vec{ب}$

من محور ص ← = (٠، ٣، ٠) = د

من محور س ← = (٣، ٠، ٠) = ن

∴ $\vec{ب}$ = $\vec{دن}$ = ن − د = (٣، ٠، ٠) − (٠، ٣، ٠) = (٣، −٣، ٠)

∴ ‖$\vec{ب}$‖ = $\sqrt{(٣)^٢ + (−٣)^٢ + (٠)^٢}$ = ٣$\sqrt{٢}$

∴ جتا ه = $\frac{\vec{أ} \cdot \vec{ب}}{‖\vec{أ}‖\ ‖\vec{ب}‖}$ = $\frac{أ_س ب_س + أ_ص ب_ص + أ_ع ب_ع}{‖\vec{أ}‖\ ‖\vec{ب}‖}$

= $\frac{٠ \times ٣ + (−٣ \times −٣) + (٣ \times ٠)}{٣\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٢}}$ = $\frac{٩}{١٨}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ جتا ه = $\frac{١}{٢}$ ∴ ه = ٦٠°

مثال رووووعة

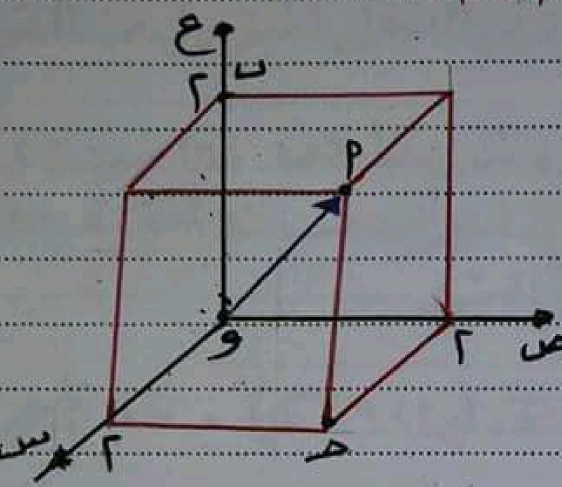
مثال: اوجد مركبة القوة $\overrightarrow{ق} = ٢\overrightarrow{س} - ٣\overrightarrow{ص} + ٥\overrightarrow{ع}$ في اتجاه $\overrightarrow{أب}$

حيث أ (١، ٤، ٠) ، ب (−١، ٢، ٣)

الحل

مركبة القوة $\overrightarrow{ق}$ في اتجاه $\overrightarrow{أب}$ = $\dfrac{\overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{أب}}{\|\overrightarrow{أب}\|}$

تمرين للطالب



مثال ٢: الشكل المقابل مكعب طول ضلعه ٢ وحدة طول

اوجد مسقط $\overrightarrow{وأ}$ على $\overrightarrow{جـب}$

الحل

نوجد احداثيات أ، ب، جـ

$\overrightarrow{أ}$ = (٢، ٢، ٢)

$\overrightarrow{ب}$ = (٠، ٠، ٢) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (٢، ٢، ٠)

مسقط $\overrightarrow{وأ}$ على $\overrightarrow{جـب}$ = $\dfrac{\overrightarrow{وأ} \cdot \overrightarrow{جـب}}{\|\overrightarrow{جـب}\|}$

يترك للطالب

إيجاد الشغل المبذول من قوة باستخدام الضرب القياسي

اذا اثرت قوة $\overrightarrow{ق}$ على جسم فحركته ازاحة $\overrightarrow{ف}$ فإن

القوة قد بذلت شغل حيث:

$$ش = \overrightarrow{ق} \cdot \overrightarrow{ف} = \|\overrightarrow{ق}\| \, \|\overrightarrow{ف}\| \, جتا هـ$$

حيث هـ هي الزاوية بين متجه $\overrightarrow{ق}$ ومتجه $\overrightarrow{ف}$

وحدة قياس الشغل = نيوتن . م = جول

= داين . سم = إرج

تمرين ١٣: اثرت ق = س - ٢ص + ٣ع نيوتن من جسم فحركته من نقطة م(-٣، ١، ٠) الى نقطة ب(٢، ٠، -٢) اوجد الشغل المبذول من القوة ق خلال الازاحة بالمتر

تمرين ١٤: يتحرك جسم تحت تأثير القوة ق = -٦س + ٨ص من نقطة م(-١، ٣) الى نقطة ب(٤، ٧) اوجد الشغل المبذول من القوة

تمرين ١٥: شخص يسحب صندوقا بقوة شد مقدارها ١٦٠ نيوتن ، وتميل على الافقي بزاوية ظلها $\frac{٣}{٤}$ ليحركه مسافة افقية ٥ متر
اوجد الشغل المبذول من قوة الشد

تمرين ١٦: اذا كان أ = (ل، ٣، -٤)، ب = (-٢، ٩، ٢م) وكان أ // ب
فاوجد قيمة ل ، م

تمرين ١٧: اوجد الشغل المبذول من ق = (٢، -٣، ٥) لتحريك جسم من نقطة م(١، -١، ٠) الى ب(٢، ٤، -٢)

تمرين ١٨: اوجد الشغل المبذول من وزن جسم مقداره ٤٠ نيوتن يتحرك رأسيا لأعلى مسافة ١٠ متر فوق سطح الارض

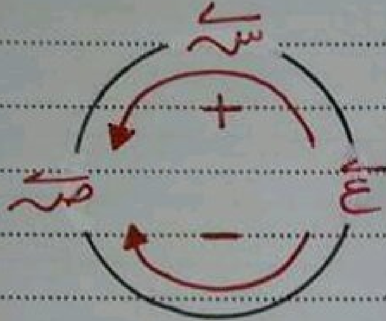
تمرين ١٩: اذا كان أ = ٢س + ٣ص - ع ، ب = ٤س - ص
فان أ . ب = ...

تمرين ٢٠: اذا كان أ = (٢، ٣، -١) ، ب = ٣س + ٤ص
اوجد أ . ب
مركبة أ في اتجاه ب
مركبة ب في اتجاه أ
|| أ + ب || ، || ٢أ - ب || ، || أ ب ||

الضرب الاتجاهي لمتجهين

$$\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \left(\|\overrightarrow{أ}\| \, \|\overrightarrow{ب}\| \text{ جا } هـ\right) \overrightarrow{ى}$$

ملحوظة: $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -\overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{أ}$



$\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ص} = \overrightarrow{ع}$

$\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{ع} = \overrightarrow{س}$

$\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{س} = \overrightarrow{ص}$

$\overrightarrow{ص} \times \overrightarrow{س} = -\overrightarrow{ع}$

$\overrightarrow{ع} \times \overrightarrow{ص} = -\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{س} \times \overrightarrow{ع} = -\overrightarrow{ص}$

المتجه × نفسه = $\overrightarrow{و}$ المتجه الصفري

مثال: اذا كان $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٥$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ١٧٫٥$ وقياس الزاوية بينهما ٦٠ . اوجد $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}$

الحل

مثال: اذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = -٦٥ \overrightarrow{ى}$ وكان $\|\overrightarrow{أ}\| = ٥$ ، $\|\overrightarrow{ب}\| = ٢٦$
اوجد قياس الزاوية بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$

ملحوظات: * اذا كان $\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{و}$ فإما $\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب}$ أو أحدهما أو كلاهما $= \overrightarrow{و}$

ويتوازى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ اذا كان $\overrightarrow{أ} = ك \overrightarrow{ب}$
- ك > ٠ في نفس الاتجاه
- ك < ٠ عكس الاتجاه

$$\overrightarrow{أ} // \overrightarrow{ب} \iff \frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$$

$\overrightarrow{ى}$ متجه الوحدة العمودي على مستوى $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ = $\dfrac{\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}}{\|\overrightarrow{أ} \times \overrightarrow{ب}\|}$

* اذا كان $\vec{\text{أ}}\left(\text{أ}_{\text{س}} \text{ ، } \text{أ}_{\text{ص}}\right)$ ، $\vec{\text{ب}}\left(\text{ب}_{\text{س}} \text{ ، } \text{ب}_{\text{ص}}\right)$

فإن $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} \end{vmatrix} = \left(\text{أ}_{\text{س}}\,\text{ب}_{\text{ص}} - \text{أ}_{\text{ص}}\,\text{ب}_{\text{س}}\right)$

* اذا كان $\vec{\text{أ}}\left(\text{أ}_{\text{س}} \text{ ، } \text{أ}_{\text{ص}} \text{ ، } \text{أ}_{\text{ع}}\right)$ ، $\vec{\text{ب}}\left(\text{ب}_{\text{س}} \text{ ، } \text{ب}_{\text{ص}} \text{ ، } \text{ب}_{\text{ع}}\right)$

فإن $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \vec{\text{س}} & \vec{\text{ص}} & \vec{\text{ع}} \\ \text{أ}_{\text{س}} & \text{أ}_{\text{ص}} & \text{أ}_{\text{ع}} \\ \text{ب}_{\text{س}} & \text{ب}_{\text{ص}} & \text{ب}_{\text{ع}} \end{vmatrix}$

مثال ٤ : اذا كان $\vec{\text{أ}} = (-٢ \text{ ، } ٣ \text{ ، } ١)$ ، $\vec{\text{ب}} = (١ \text{ ، } ٢ \text{ ، } ٤)$ اوجد $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}$

الحل

$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \vec{\text{س}} & \vec{\text{ص}} & \vec{\text{ع}} \\ -٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٠\,\vec{\text{س}} + ٩\,\vec{\text{ص}} - ٧\,\vec{\text{ع}}$

تمرين ٤ : اذا كان $\vec{\text{أ}} = (٢ \text{ ، } ٣ \text{ ، } ١)$ ، $\vec{\text{ب}} = (-١ \text{ ، } ١ \text{ ، } ٣)$ اوجد $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}$

تمرين ٥ : اذا كان $\|\vec{\text{أ}}\| = ٦$ وكانت جيوب تمام زوايا الاتجاه للمتجه أ هي على الترتيب $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ وكان $\vec{\text{ب}}\,(-٢ \text{ ، } ٣ \text{ ، } ٥)$
اوجد $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}$

$\|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\| =$ مساحة ▱ الذي فيه $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ ضلعين متجاورين
أو
ضعف مساحة △ الذي فيه $\vec{\text{أ}}$ ، $\vec{\text{ب}}$ ضلعين متجاورين

الضرب الثلاثي القياسي

$$\overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج} = \begin{vmatrix} \text{أس} & \text{أص} & \text{أع} \\ \text{بس} & \text{بص} & \text{بع} \\ \text{جس} & \text{جص} & \text{جع} \end{vmatrix}$$

وإذا كان $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ج}$ ثلاثة أضلاع غير متوازية في متوازي مستطيل فإن

$$\text{حجم متوازي السطوح} = \left| \overrightarrow{أ} \cdot \overrightarrow{ب} \times \overrightarrow{ج} \right|$$

مثال : أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أضلاع متجاورة يمثلها المتجهات $\overrightarrow{أ}$ (٢، ١، ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ (−١، ٣، ٢) ، $\overrightarrow{ج}$ (١، ١، −٢)

مثال ٤ : أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه ثلاثة أحرف غير متوازية يمثلها المتجهات $\overrightarrow{أ}$ (٣، −٤، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ (٠، ٢، −٣) ، $\overrightarrow{ج}$ (٣، ٢، ٢)

الحمد لله رب العالمين

٠١٢٢٧٢٧٨٠٨٤