

$$n(اح) = (4 \ 6 \ 12 \ 6 \ 3 \dots) \leftarrow \therefore r = 3$$

مثال بين أن المتابعة (اح) حيث $\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$ هي متتابعة هندسية ثم أوجد حدها الثامن وأوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧٦٨

الحل

$$\therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \therefore r = \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \text{مقدار ثابت}$$

$$\textcircled{1} \quad \therefore (اح) \text{ متتابعة هندسية أساسها } r = 3$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{3}{8} = \frac{3}{8} = p \quad \therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \text{أولاً}$$

$$\therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

مثال متتابعة هندسية فيها $\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$ أوجد المتتابعة

الحل

$$\therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\textcircled{1} \quad \therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\textcircled{2} \quad \therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8} \quad \therefore \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

∴ هم ① پیدا نه و $(r-r)(r+r+1) = 0$

منها $r = 2$. مرفوض (لماذا)

$$(r_1 + r_2 + r_3) = \text{مرفوض (مأاا)}$$

∴ $r = c$ ، فإنها $r = c \leftarrow (١٢) \text{ بالعويض في (٥)}$

$$\neg = P \div \leftarrow \neg \varepsilon \cdot = P \varepsilon \cdot \div \neg \varepsilon \cdot = P \vee \neg + P \wedge \div$$
$$(\dots 54321) = (2) \iff 5 = 2, 4 = 1 \therefore$$

مثالی

مساواة هندسية حدها الثالث يساوي

المعكوس الضربى لحدها الاول وحدها الخامس $\frac{1}{15}$

اوجد المتابعة

—

$$1 \pm \sqrt{p} \therefore 1 = \sqrt{p} \therefore \frac{1}{p} = \sqrt{p} \therefore \frac{1}{p} = \sqrt{p} \therefore$$
$$\frac{1}{150} = \sum^3 x \cdot p \therefore \frac{1}{150} = \sum^5 p \therefore \frac{1}{150} = \sum_0^7 \therefore$$

عندما $r = 1$ ① عندما $r = -1$ ②

$$\frac{1}{150} = 5 \times 10^{-3} \quad \frac{1}{150} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$
$$\frac{1}{0} = \infty \therefore \frac{1}{100} = \infty \quad \bigg| \quad \frac{1}{0} = \infty \quad \frac{1}{100} = \infty \therefore$$
$$0 = p \therefore \quad 0 = p \therefore$$
$$(\dots, s \frac{1}{s_0}, s \frac{1}{s_0}, s_1, s_0) = (x) \quad | \quad (\dots, s \frac{1}{s_0}, s \frac{1}{s_0}, s_1, s_0) = (x):$$

مثال

متابعة هندسية مجموع حديثها الاول

والثاني يساوي ٣ و مجموع مربعيهما يساوي ٥ أو جملتها

الحل

$$\textcircled{1} \quad r = (j+1)p \quad \therefore \quad r = jp + p \quad \therefore$$

$$\therefore 5 = 2^2 + 3^2 \leftarrow (5)$$

منه ① $3 = 1^2 + 2^2$ بتربيع الطرفين

$$\therefore 9 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \quad (3) \quad \text{منه ⑤ في ①}$$

$$\therefore 9 = 1^2 + 2^2 + 3^2 \quad (4) \quad \text{بالتعويض في ①}$$

$$\therefore 3 = \frac{1}{2} + 2 \quad \therefore 3 = \left(\frac{1}{2} + 1\right) 2$$

$$\therefore 3 = 2 + 1 \quad \therefore 3 = 2 + 1$$

$$\therefore 3 = 2 + 1 \quad \text{أو } 2 = 3 \quad \leftarrow \text{منه ⑤ في ①}$$

$$\therefore 3 = 2 + 1 \quad \text{أو } 2 = 3 \quad \leftarrow \text{منه ⑤ في ①}$$

مثال

متابعة هندسية حدودها موجبة، حدها الخامس يزيد عن حدها الرابع بمقدار ٧، وحدها الرابع يزيد عن حدها الثاني بمقدار ٣٠. أوجد هذه المتتابعة

الحل

$$\text{بحجـ } ⑤ - ④ = 7 \quad \therefore 2^2 - 1^2 = 7 \quad \therefore 3 = 2 \quad \therefore 3 = 2 \quad \text{منه ⑤ في ①}$$

$$\text{بحجـ } ⑤ - ④ = 7 \quad \therefore 2^2 - 1^2 = 7 \quad \therefore 3 = 2 \quad \therefore 3 = 2 \quad \text{منه ⑤ في ①}$$

$$\text{منه ⑤ في ①}$$

بقسمة ⑤ ÷ ④

$$\frac{1}{9} = \frac{(1+r)}{2}$$

$$\therefore 10 = 9 + r$$

$$\therefore 10 = 9 + r \quad \therefore 1 = r$$

$$\therefore 1 = r \quad \therefore 1 = r \quad \therefore 1 = r$$

$$\therefore 1 = r$$

$$\therefore 1 = r \quad \therefore 1 = r \quad \therefore 1 = r$$

الاورسط الهندسية

إذا كان a, b, c ثلاث حدود متتابعة هندسية فإن

b هي الورسط الهندسي بين a و c $\Rightarrow b^2 = ac$

$$\therefore b = \pm \sqrt{ac}$$

أي أن الورسط الهندسي لكميتين لهما نفس الإشارة

هو الجذر التربيعي (الموجب والسالب) الحاصل ضربهما

مثلاً الورسط الهندسي للعددين ٨٤ و ٤ هو $\pm \sqrt{336} = \pm 18.33$

* تعميم القاعدة :-

الورسط الهندسي لعدة كميات موجبة عددها (n)

يساوي الجذر النوني الموجب الحاصل ضرب هذه الكميات

مثلاً الورسط الهندسي للكميات $2, 4, 8, 16$ هو $\sqrt[4]{2 \times 4 \times 8 \times 16} = 5.04$

مثال

(١) الورسط الهندسي للعددين ١٦ و ١ هو ٤

(٢) إذا كان a, b, c, d في تسابع هندسي فإن $a^2 = cd$

الحل

(١) الورسط الهندسي $b = \sqrt{ac} = \sqrt{16 \times 1} = 4$

(٢) الكميات في تسابع هندسي $\therefore (a-b)(c-d) = (b-a)(d-c)$

$$\therefore a^2 - 2ab + b^2 - bc + bd - cd = b^2 - 2ba + a^2 + ad - bc - d^2$$

$$\therefore a^2 - 2ab + b^2 - bc + bd - cd = b^2 - 2ba + a^2 + ad - bc - d^2$$

$$\therefore a^2 - 2ab + b^2 - bc + bd - cd = b^2 - 2ba + a^2 + ad - bc - d^2$$

* تذكر أن :-

(١) إذا كان a, b, c, d في تسابع حسابي (ثلاث حدود موجبة

متتالية متتابعة حسابية) فإن b يكون وسطاً حسابياً

بين ٥٢٢ ويكون وسطهم الهندسي ٥٢٧
 (١) إذا كانت ٥٢٢ ثلاث حدود موجبة ومتتالية
 في متتابعة هندسية فانه ٥ تكون وسطاً هندسياً
 بين ٥٢٢ ويكون وسطهم الحسابي $\frac{٥+٢}{٢}$
 (٣) لاي عددين موجبين ٥٢٢ يكون
 وسطهم الحسابي $\frac{٥+٢}{٢}$ ووسطهم الهندسي ٥٢٧

سوي العلاقة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي

الوسط الحسابي لعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر
 من وسطهما الهندسي

مثال اوجد العددين اللذين وسطهما الحسابي
 ٥ ووسطهما الهندسي ٣

الحل

بفرض أن العددين هما ٥٢٢ $\therefore \frac{٥+٢}{٢} = ٥$

$$\therefore ٥+٢ = ١٠ \quad (1)$$

بالموسط الهندسي $٣ = \sqrt{٥٢٢} \therefore ٣ = \sqrt{٥٢٢} \quad (2)$

من (1) $٥ = ١٠ - ٢$ بالتعويض في (2)

$$٣ = \sqrt{(١٠-٢)٢} \quad \therefore ٩ = (١٠-٢)٢$$

$$٩ = (١٠-٢)٢ \quad \therefore ٩ = ١٠٠ - ٤٠ + ٤$$

$$٩ = ١٠٠ - ٤٠ + ٤ \quad \therefore ٩ = ١٠٠ - ٣٦$$

$$٩ = ١٠٠ - ٣٦ \quad \therefore ٩ = ٦٤$$

العددين هما ١٦ و ٩

ب (٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ١٢، ١٤، ١٦، ١٨، ٢٠، ٢٢، ٢٤، ٢٦، ٢٨، ٣٠، ٣٢، ٣٤، ٣٦، ٣٨، ٤٠، ٤٢، ٤٤، ٤٦، ٤٨، ٥٠، ٥٢، ٥٤، ٥٦، ٥٨، ٦٠، ٦٢، ٦٤، ٦٦، ٦٨، ٧٠، ٧٢، ٧٤، ٧٦، ٧٨، ٨٠، ٨٢، ٨٤، ٨٦، ٨٨، ٩٠، ٩٢، ٩٤، ٩٦، ٩٨، ١٠٠)
 متتابعة هندسية فيها $c = p$ $k = r$ $m = r$ $l = 1408$

$$\frac{1}{cv} = \frac{r^2 + r^2}{\frac{1408}{r} + \frac{1408}{r}} \quad \frac{1}{cv} = \frac{r^2 + r^2}{\frac{1408}{r} + \frac{1408}{r}}$$

$$\frac{1}{cv} = \frac{r^2 + r^2}{\frac{1408}{r} + \frac{1408}{r}} \quad \frac{1}{cv} = \frac{r^2 + r^2}{\frac{1408}{r} + \frac{1408}{r}}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{cv} = \frac{r^2 + r^2}{1408} \quad \therefore \frac{1}{cv} = \frac{r^2 + r^2}{1408} \quad \therefore \frac{1}{cv} = \frac{r^2 + r^2}{1408}$$

$\therefore c = p$ $k = r$ $l = 1408$
 $\therefore p = l$ $\therefore p = 1408$
 $\therefore r = 3$ $\therefore r = 3$
 $\therefore v = 7$
 \therefore عدد الاوساط = ٥ اوساط هندسية

المتسلسلات الهندسية

المتسلسلة الهندسية:

هي مجموع حدود متتابعة هندسية

فإذا كانت $(p, 2p, 3p, \dots, np)$

متتابعة هندسية حدها العام $p \cdot r^{n-1}$ فانه

$$p + 2p + 3p + \dots + np = p(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

حيث n عدد حدود المتتابعة

في مجموع n حداً الأولى من متسلسلة هندسية هي -

(١١) بمعلومية حدها الأول (P) واساسها (r)

$$H_n = \frac{(r-1)P}{r-1} \quad ; r \neq 1 \quad ; n \text{ عدد الحدود}$$

(١٢) بمعلومية الحد الأول (P) والحد الأخير (L)

$$H_n = \frac{L-P}{r-1} \quad ; r \neq 1$$

مثال

أوجد مجموع الثانية حدود الأولى من متسلسلة الهندسية (ح) H_n حيث $3 \times 9 = 1 + \dots$

الحل

$$\begin{aligned} & 3 \times 9 = P = 1 \quad ; \quad 3 \times 9 = L = 1 \\ & 18 = P \quad ; \quad 18 = L \\ & 3 \times 9 = H_n \quad ; \quad 3 \times 18 = H_n \\ & \frac{L-P}{r-1} = H_n \quad ; \quad \frac{18-1}{3-1} = H_n \\ & H_n = 8.5 \end{aligned}$$

مثال

أوجد مجموع H حدود من المتسلسلة الهندسية (١١٩٦٣٦٠٠٠) ابتداءً من حدها الثالث

الحل

$$\begin{aligned} & 1 = P \quad ; \quad 3 = r \\ & 9 = 3^2 = 3^2 \times 1 = 9 \\ & H_n = \frac{(r^n - 1)P}{r-1} \\ & H_n = \frac{(3^2 - 1)1}{3-1} = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ح.} = \frac{9(1-3^9)}{3-1} = \frac{1}{2} [9-3^9] \therefore \text{ح.} = 1089$$

مثال (١) متتابعة هندسية مجموعها n حداً الأولى
منها يعطى بالعلاقة ح. = $3^{1+n} - 4$ فاحس

$$(٢) \sum_{i=1}^n (1/3 \times 3^{1-i}) = \dots$$

$$(٣) 1 + 3 + 9 + \dots + 7071 = \dots$$

الحل

(١) مجموع n حداً الأولى يعطى بالعلاقة ح. = $3^{1+n} - 4$
 $\therefore \text{ح.} = 3^4 - 3^3 = 81 - 27 = 54$
 $\therefore \text{ح.} = 3^4 - 3^3 = 81 - 27 = 54$

(٢) $\sum_{i=1}^n (1/3 \times 3^{1-i}) =$ مجموع n حدود الأولى من متتابعة
هندسية حدها الأول $1/3$ واساسها 3
 $= \frac{1}{2} (1 - 3^{-n}) = 1089$

(٣) $1 + 3 + 9 + \dots + 7071 =$ مجموع متتابعة
هندسية حدها الأول 1 واساسها 3 وحدها الأخير 7071
 $7071 = 3^8 \therefore n = 8$
 $\therefore \text{المقدار} = 3^8 - 3^0 = 6561 - 1 = 6560$
 $\therefore \text{المقدار} = \frac{3^8 - 3^0}{3 - 1} = \frac{6561 - 1}{2} = 3280$

مثال ٤ كم حداً يلزم أخذُه من المتابعة الهندسية
(٣ ٦ ٩ ١٢) ابتداءً منها الأول ليكون
مجموع هذه الحدود = ٣٨١

الحل

$$\therefore \begin{matrix} 3 = p \\ 6 = r \\ 9 = \end{matrix} \therefore \frac{p(r^n - 1)}{r - 1} = 381$$

$$\therefore \frac{3(r^3 - 1)}{r - 1} = 381 \quad \therefore 3(r^2 + r + 1) = 381$$

$$\therefore r^2 + r + 1 = 127 \quad \therefore r^2 + r - 126 = 0 \quad \therefore r = 10 \text{ or } r = -12$$

مثال ٥ متابعة هندسية حدودها موجبة فيها
حج = ٦ ، ح = ٣ ، ح = ١ ، ٩ اوجد المتابعة ومجموع ١٠ حداً الأولى منها

الحل

$$\begin{aligned} \text{حج} = 6 & \therefore p = 6 \\ \text{ح} = 3 & \therefore p = 3 \\ \text{ح} = 1 & \therefore p = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{p(r^n - 1)}{r - 1} = 9 \quad \therefore \frac{6(r^3 - 1)}{r - 1} = 9 \quad \therefore 2(r^2 + r + 1) = 3$$

$$\therefore 2(r^2 + r + 1) = 3 \quad \therefore 2r^2 + 2r + 2 = 3 \quad \therefore 2r^2 + 2r - 1 = 0$$

$$\therefore \frac{p(r^n - 1)}{r - 1} = 14 \quad \therefore \frac{6(r^3 - 1)}{r - 1} = 14 \quad \therefore 3(r^2 + r + 1) = 7$$

$$\therefore 3(r^2 + r + 1) = 7 \quad \therefore 3r^2 + 3r + 3 = 7 \quad \therefore 3r^2 + 3r - 4 = 0$$

مثال

إذا كان مجموع n حداً الأول من متتابعة هندسية يعطى بالقانون $128 - 2^{n-7}$ فأوجد المتتابعة

الحل

$n=7$

$$128 - 2^{7-7} = 127$$

$$127 = P = 128 - 2^{7-7} \Rightarrow P = 127 \leftarrow 1$$

$$127 = P + P = 128 - 2^{7-7} \Rightarrow P = 127 \leftarrow 2$$

$$127 = P(1+r) = 128 - 2^{7-7} \Rightarrow P = 127 \leftarrow 3$$

$$127 = P(1+r)^2 = 128 - 2^{7-7} \Rightarrow P = 127 \leftarrow 4$$

المتتابعة هي (127, 127, 127, 127, 127, 127, 127)

مثال

يتقاضى عامل راتباً شهرياً قدره ١٤٠٠ جنية في العام الأول ثم يزداد امرة بمعدل ١٪ سنوياً من مرتبة السنة السابقة لها مباشرة. أكتب باستخدام رمز التجميع مجموع ما يتحصل عليه العامل من أجر خلال خمس سنوات ثم اوجد هذا المجموع

الحل

السنة الأولى راتب العامل = ١٤٠٠ جنية شهرياً

السنة الثانية راتب العامل = ١٤٠٠ + ١٤٠٠ × ١٪

$$= 1400(1.01)$$

السنة الثالثة راتب العامل = ١٤٠٠ + ١٤٠٠(١.٠١) × ١٪

$$= 1400(1.01)^2$$

بالمثل نجد أن راتب العامل خلال ٥ سنوات هو

$$1400 + 1400(1.01) + 1400(1.01)^2 + 1400(1.01)^3 + 1400(1.01)^4$$

السنة الأولى السنة الثانية السنة الثالثة

$$= 1400 \sum_{r=0}^4 (1.01)^r$$

$$= 1400 \frac{[1 - (1.01)^5]}{1 - 1.01} = 87913 \text{ جنيهاً}$$

المتسلسلات الهندسية الغير منتهية

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هي مجموع عدد لا نهائي من الحدود
متتابعة هندسية وتكون تقاربية اذا كان المجموع يقترب
من عدد حقيقي وتكون تباعدية اذا كان ليس لها مجموع

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r} \quad \text{حيث } |r| < 1$$

* ملاحظات هامة :

(1) المتسلسلة الهندسية التي حدها الاول a ونسبتها r
تكون متقاربة ولها مجموع عندما $|r| < 1$ أي أن $|r| < 1$
وتكون غير متقاربة (تباعدية) عندما $|r| \geq 1$

مجموع المتتابعة الهندسية الغير منتهية

عندما $|r| < 1$ $\rightarrow \infty$ $|r| < 1$ $\rightarrow \infty$ $\rightarrow \infty$

$$\frac{a}{1-r} = \infty$$

مثال : اوجد مجموع حدود المتتابعة الهندسية
(1, 2, 4, 8, 16, 32, ...)

الحل

$$a = 1, r = 2 \quad \therefore |r| > 1$$

$$\frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1 \quad \therefore \text{لا يوجد مجموع}$$

مثال : اذا كان مجموع عدد غير منتهى من حدود
متتابعة هندسية حدها الاول 1 هو 96 فما أساسها

مثال

متابعة هندسية حدودها موجبة مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها ١٤ ونريد منها الأول عنددها الثاني بمقدار ٤ اوجد المتتابعة ومجموع عند لانها في من حدودها ابتداءاً من حدودها الأولى

الحل

بفرض ان المتتابعة هي (٢، ٢ر، ٢ر^٢، ٢ر^٣، ...)
 ١- الأولى = ١٤ $\therefore ٢ + ٢ر + ٢ر^٢ = ١٤$
 ٢- ٢ - ٢ر = ٤ $\therefore ٢(١ - ر) = ٤$
 بقسمة ١ على ٢ $\therefore ١ - ر = ٢$ $\therefore ر = -١$
 ٣- $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٢ - ١}$ $\therefore ١ = ٢(٢ - ١)$ $\therefore ١ = ٤ - ٢$ $\therefore ٢ = ٤ - ١ = ٣$
 ٤- $٢ - ٢ر = ٤$ $\therefore ٢(١ - ر) = ٤$ $\therefore ١ - ر = ٢$ $\therefore ر = -١$
 ٥- بالتعويض في ١ $\therefore ٢ + ٢(-١) + ٢(-١)^٢ = ١٤$ $\therefore ٢ - ٢ + ٢ = ١٤$ $\therefore ٢ = ١٤$
 ٦- $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٢ - ١}$ $\therefore ١ = ٢(٢ - ١)$ $\therefore ١ = ٤ - ٢$ $\therefore ٢ = ٤ - ١ = ٣$
 ٧- $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٢ - ١}$ $\therefore ١ = ٢(٢ - ١)$ $\therefore ١ = ٤ - ٢$ $\therefore ٢ = ٤ - ١ = ٣$
 ٨- $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٢ - ١}$ $\therefore ١ = ٢(٢ - ١)$ $\therefore ١ = ٤ - ٢$ $\therefore ٢ = ٤ - ١ = ٣$
 ٩- $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٢ - ١}$ $\therefore ١ = ٢(٢ - ١)$ $\therefore ١ = ٤ - ٢$ $\therefore ٢ = ٤ - ١ = ٣$
 ١٠- $\frac{١}{٢} = \frac{٢}{٢ - ١}$ $\therefore ١ = ٢(٢ - ١)$ $\therefore ١ = ٤ - ٢$ $\therefore ٢ = ٤ - ١ = ٣$

مثال

ضع الكسر العشري ٨.٨٨... على صورة كسر أعيناي

الحل

٨.٨٨... = ٨ + ٠.٨٨...
 = مجموع متتابعة هندسية غير منتهية حدودها الأولى ٨، وناساسها ١٠
 $\therefore ٨.٨٨... = ٨ + \frac{٨}{١٠ - ١} = ٨ + \frac{٨}{٩} = \frac{٨٠ + ٨}{٩} = \frac{٨٨}{٩}$