١٠

حسب المنهاج الجديد

الكراسة الذهبية في الرياضيات

للصف العاشر (حسب المقرر ٢٠٢٢م) ١٠

❖ شرح شامل وكامل للكتاب المدرسي

❖ اسئلة متنوعة وشاملة من اختبارات سابقة

٢٠٢١-٢٠٢٢م

إعداد المعلم / محمد بريكة

تحت إشراف / لجنة مبحث الرياضيات في مدرسة مسقط الثانوية (ب)

J – ٠٥٩٩٩٥١٨٦٧

W – ٠٥٦٧٧٢٥٣٤٥

الفصل الثاني

الدرس / الزاوية في الوضع القياسي

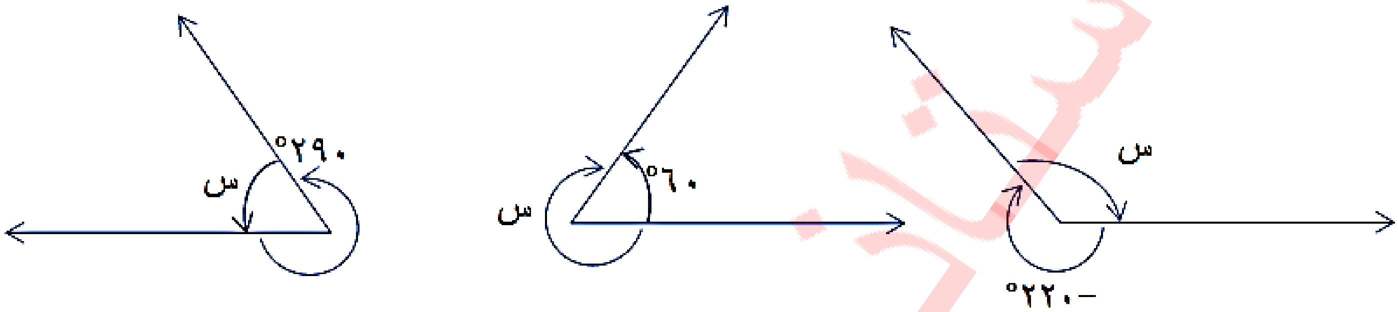
الزاوية الموجهة: هي زاوية يتحدد اتجاهها باتجاه دوران ضلع الابتداء لينطبق على ضلع الانتهاء.

أنواع الزوايا الموجهة:

١) **زاوية موجهة موجبة** / إذا كان اتجاه الدوران عكس عقارب الساعة.

٢) **زاوية موجهة سالبة** / إذا كان اتجاه الدوران مع عقارب الساعة.

مثال (١) / ما قيمة س في الأشكال الأتية:



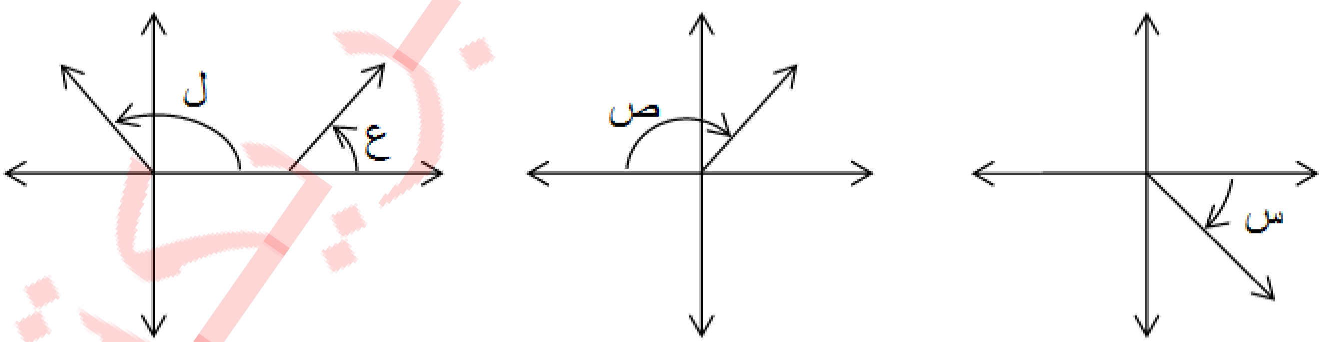
الحل / ∢س = الاتجاه (٣٦٠° − الزاوية المعطاة)

∢س = −(٣٦٠° − ٢٢٠°) = −١٤٠°	∢س = −(٣٦٠° − ٦٠°) = −٣٠٠°	∢س = +(٣٦٠° − ٢٩٠°) = +٧٠°

تكون الزاوية في الوضع القياسي إذا تحقق فيها شرطان هما:

١) رأسها نقطة الأصل　　٢) ضلع الابتداء هو محور السينات الموجب

مثال (٢) / أميز الزوايا التي في الوضع القياسي:



الحل / الزاوية س في الوضع القياسي

الزاوية ص ليست في الوضع القياسي (لأن ضلع الابتداء ليس محور السينات الموجب)

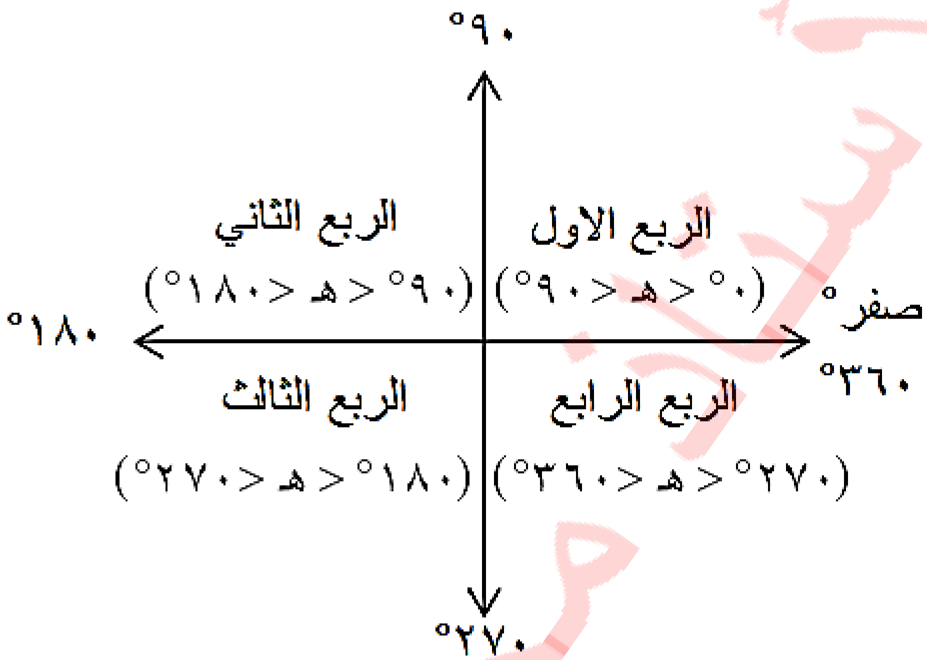
الزاوية ع ليست في الوضع القياسي (لأن رأسها ليس نقطة الأصل)

الزاوية ل في الوضع القياسي

أتعلم / ١) المحوران الاحداثيان يقسمان المستوى إلى (٤) أرباع ترتب باتجاه عكس عقارب الساعة.

٢) عند رسم زاوية في الوضع القياسي فإن ضلع انتهائها يحدد موقعها في المستوى الديكارتي.

٣) تسمى الزوايا التي في الوضع القياسي وينطبق ضلع انتهائها على أحد المحاور الإحداثية زاوية ربعية. مثل (صفر° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°)



مثال (٣) / أحدد الربع من المستوى الذي تقع فيه الزوايا الأتية:

(°٩١ ، °١٩٠ ، −°٢٢٠ ، °٨٨ ، −°٦٠ ، °٥٥٠ ، −°٤٣٠ ، °٤٥٠)

الحل / الزاوية °٩١ تقع في الربع الثاني

الزاوية °١٩١ تقع في الربع الثالث

الزاوية −°٢٠٠ (−°٢٢٠+°٣٦٠=°١٤٠) تقع في الربع الثاني

الزاوية °٨٨ تقع في الربع الأول

الزاوية −°٦٠ (−°٦٠+°٣٦٠=°٣٠٠) تقع في الربع الرابع

الزاوية °٥٥٠ (°٥٥٠−°٣٦٠=°١٩٠) تقع في الربع الثاني

الزاوية −°٤٣٠ (−°٤٣٠+°٣٦٠=°٧٠) تقع في الربع الأول

الزاوية °٤٥٠ (°٤٥٠−°٣٦٠=°٩٠) زاوية ربعية

الدرس / قياس الزوايا

القياس الستيني للزاوية: هو قياس الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني.

الزاوية النصف قطرية: هي زاوية مركزية في دائرة يقابلها قوس طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة ، ويرمز له بالرمز ($١^{د}$) وهي وحدة قياس الزاوية بالقياس الدائري.

الراديان: هي وحدة قياس الزوايا بالقياس الدائري ، حيث أن كل ١ راديان = ٥٧.٣° .

للتحويل من القياس الدائري إلى القياس الستيني:

١) إذا كانت الزاوية بدلالة الراديان (بدون $\pi^{د}$) نضربها في ٥٧.٣°

٢) إذا كانت الزاوية بدلالة $\pi^{د}$ نعوض بدلاً من $\pi^{د}$ بقيمتها ١٨٠°

للتحويل من القياس الستيني إلى القياس الدائري: نضرب الزاوية في $\frac{\pi^{د}}{١٨٠^\circ}$

مثال (١) / أحول القياسات الأتية من راديان إلى درجات:

$$\left(\frac{\pi^{د}}{٦} \text{ ، } -\frac{٥}{٦}\pi^{د} \text{ ، } ٢.٥^{د} \right)$$

الحل / الزاوية $\frac{\pi^{د}}{٦} = \frac{١}{٦} \times ١٨٠^\circ = ٣٠^\circ$

الزاوية $-\frac{٥}{٦}\pi^{د} = -\frac{٥}{٦} \times ١٨٠^\circ = -١٥٠^\circ$

الزاوية $٢.٥^{د} = ٢.٥^{د} \times ٥٧.٣^\circ = ١٤٣.٢٥^\circ$

مثال (٢) / أحول القياسات الأتية من الدرجات إلى راديان:

$$\left(١٣٥^\circ \text{ ، } -٩٠^\circ \text{ ، } -٤٢٠^\circ \right)$$

الحل / الزاوية $١٣٥^\circ = ١٣٥^\circ \times \frac{\pi^{د}}{١٨٠^\circ} = \frac{٣}{٤}\pi^{د}$

الزاوية $-٩٠^\circ = -٩٠^\circ \times \frac{\pi^{د}}{١٨٠^\circ} = -\frac{١}{٢}\pi^{د}$

الزاوية $-٤٢٠^\circ = -٤٢٠^\circ \times \frac{\pi^{د}}{١٨٠^\circ} = -\frac{٧}{٣}\pi^{د}$

الزاويتان المتكافئتان: هما الزاويتان اللتان لهما نفس ضلع الابتداء والانتهاء

قاعدة إيجاد زاوية مكافئة في القياس الستيني: ∡س تكافئ ∡س + ن × ٣٦٠° (حيث ن عدد صحيح)

قاعدة إيجاد زاوية مكافئة في القياس الدائري: ∡س تكافئ ∡س + ن × ٢π (حيث ن عدد صحيح)

ملاحظة / كل زاوية لها عدد لا نهائي من الزوايا المتكافئة.

مثال (٣) / أجد زاوية موجبة مكافئة لكل من الزوايا التالية:

(٦٠° ، −١٥٠° ، $\frac{\pi}{٤}$)

الحل / الزاوية ٦٠° تكافئ ٦٠° + ١ × ٣٦٠° = ٤٢٠° (حيث ن = ١)

الزاوية −١٥٠° تكافئ −١٥٠° + ٢ × ٣٦٠° = −١٥٠° + ٧٢٠° = ٥٧٠° (حيث ن = ٢)

الزاوية $\frac{\pi}{٤}$ تكافئ $\frac{\pi}{٤}$ + ١ × ٢π = $\frac{\pi + ٨\pi}{٤}$ = $\frac{٩\pi}{٤}$ (حيث ن = ١)

مثال (٤) / أجد زاوية سالبة مكافئة لكل من الزوايا التالية:

(٦٠° ، −١٥٠° ، $\frac{\pi}{٤}$)

الحل / الزاوية ٦٠° تكافئ ٦٠° − ١ × ٣٦٠° = −٣٠٠° (حيث ن = ١)

الزاوية −١٥٠° تكافئ −١٥٠° − ٢ × ٣٦٠° = −١٥٠° − ٧٢٠° = ٨٧٠° (حيث ن = ٢)

الزاوية $\frac{\pi}{٤}$ تكافئ $\frac{\pi}{٤}$ − ١ × ٢π = $\frac{\pi - ٨\pi}{٤}$ = $\frac{-٧\pi}{٤}$ (حيث ن = ١)

سؤال (١) / أجد زاوية سالبة وأخرى موجبة مكافئة لكل من الزوايا التالية:

(−٣٠٠° ، $\frac{\pi}{٦}$)

....

....

....

....

....

الدرس / الاقترانات المثلثية

دائرة الوحدة: هي دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

إذا وقعت النقطة (س،ص) على ضلع انتهاء الزاوية هـ فإن:

جتاهـ $= \frac{\text{س}}{\text{ر}}$ ، جاهـ $= \frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ ، ظاهـ $= \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

حيث $\text{ر} = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$

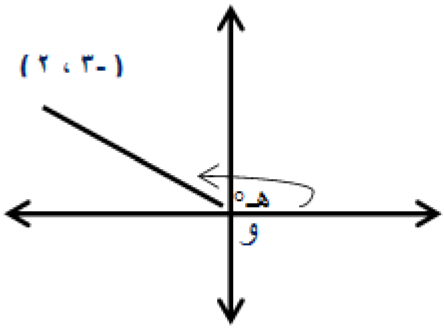
ملاحظة / $-١ \le$ جتاهـ ≤ ١ ، $-١ \le$ جاهـ ≤ ١

مثال (١) / إذا قطع ضلع انتهاء الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها هـ° دائرة الوحدة في النقطة أ(٤،٣) فأجد قيمة كل من: جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ؟

الحل / أولاً نجد قيمة ر $= \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}} = \sqrt{(٤)^{٢} + (٣)^{٢}} = \sqrt{١٦ + ٩} = \sqrt{٢٥} = ٥$

جاهـ $= \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{٣}{٥}$ ، جتاهـ $= \frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{٤}{٥}$ ، ظاهـ $= \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٣}{٤}$

مثال (٢) / ما قيمة جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ في الشكل المجاور ؟



الحل / أولاً نجد قيمة ر $= \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}} = \sqrt{(-٣)^{٢} + (٢)^{٢}}$

$= \sqrt{٩ + ٤} = \sqrt{١٣}$

جاهـ $= \frac{\text{ص}}{\text{ر}} = \frac{٢}{\sqrt{١٣}}$ ، جتاهـ $= \frac{\text{س}}{\text{ر}} = \frac{-٣}{\sqrt{١٣}}$ ، ظاهـ $= \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٢}{-٣}$

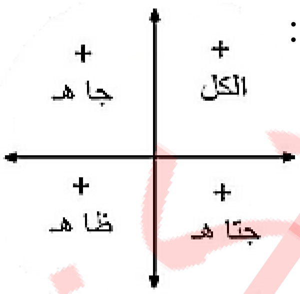
أتعلم / تتحدد إشارة الاقترانات المثلثية للزاوية هـ حسب الربع الذي تقع فيه بحيث :

جاهـ موجبة في الربع الأول والثاني

جتاهـ موجبة في الربع الأول والرابع

ظاهـ موجبة في الربع الأول والثالث

كل جيب
يظلله جتاه



مثال (٣) / أحدد إشارة ما يأتي: جا٦٠° ، جتا٢٤٠° ، ظا١٣٥°

الحل / جا٦٠° موجبة لأنها تقع في الربع الأول الذي فيه جميع الاقترانات المثلثية موجبة

جتا٢٤٠° سالبة لأنها تقع في الربع الثالث الذي فيه ظاهـ فقط الموجبة

ظا١٣٥° سالبة لأنها تقع في الربع الثاني الذي فيه جاهـ فقط الموجبة

أتعلم / قوانين ضعف الزاوية:

أ) جا(٢هـ) = ٢جاهـ×جتاهـ

ب) جتا(٢هـ) = جتا^{٢}هـ - جا^{٢}هـ ، جتا(٢هـ) = ١-٢جا^{٢}هـ ، جتا(٢هـ) = ٢جتا^{٢}هـ - ١

جدول قيم النسب المثلثية الأساسية للزوايا:

الزاوية	جاهـ	جتاهـ	ظاهـ
٣٠°	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٤٥°	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١
٦٠°	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٩٠°	١	صفر	غير معرف

مثال (٤) / أجد قيمة ما يلي دون استخدام الحاسبة:

أ) جا$\frac{\pi}{٨}$ × جتا$\frac{\pi}{٨}$

ب) جتا^{٢}١٥° - جا^{٢}١٥°

ج) ٢جتا^{٢}٣٠° - ١

الحل / أ) جا$\frac{\pi}{٨}$ × جتا$\frac{\pi}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$جا$\left(٢ \times \frac{\pi}{٨}\right)$

= $\frac{١}{٢}$جا$\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$ = $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

ب) جتا^{٢}١٥° - جا^{٢}١٥° = جتا(٢×١٥°)

= جتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ج) ٢جتا^{٢}٣٠° - ١ = جا٢×٣٠°

= جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ملاحظة / يمكن ايجاد قيم الاقترانات المثلثية عن طريق أصابع اليد اليسرى كالتالي:

جاس = $\frac{\sqrt{\text{عدد الاصابع تحت الزاوية}}}{٢}$

جتاس = $\frac{\sqrt{\text{عدد الاصابع فوق الزاوية}}}{٢}$

ظاس = $\frac{\sqrt{\text{عدد الاصابع تحت الزاوية}}}{\sqrt{\text{عدد الاصابع فوق الزاوية}}}$

مثال (٥) / أ زاوية منفرجة بحيث جتاأ = $\frac{-٤}{٥}$ ، أجد قيمة جتا٢أ ؟

الحل / باستخدام المتطابقة جتا(٢هـ) = ٢جتا^{٢}هـ − ١

$$\text{جتا}(٢\text{أ}) = ٢\left(\frac{-٤}{٥}\right)^{٢} - ١ = \frac{٣٢}{٢٥} - ١ = \frac{٧}{٢٥}$$

بما أن الزاوية أ منفرجة إذاً تقع في الربع الثاني و أشارتها سالبة و جتا(٢أ) = $\frac{-٧}{٢٥}$

مثال (٦) / أ زاوية منعكسة بحيث جاأ = $\frac{-٥}{١٣}$ ، أجد قيمة جا٢أ ؟

الحل / باستخدام المتطابقة جا^{٢}هـ+جتا^{٢}هـ = ١ ← $\left(\frac{-٥}{١٣}\right)^{٢}$+جتا^{٢}هـ = ١ ← جتا^{٢}هـ = ١ − $\frac{٢٥}{١٦٩}$

$$\text{جتاهـ} = \sqrt{١ - \frac{٢٥}{١٦٩}} = \frac{١٢}{١٣}$$

بما أن الزاوية أ منعكسة إذاً تقع في الربع الثالث (سالبة = $\frac{-١٢}{١٣}$) أو الربع الرابع (موجبة = $\frac{١٢}{١٣}$)

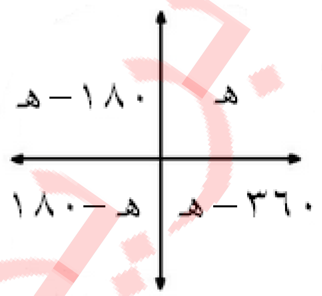
وباستخدام المتطابقة جا(٢هـ) = ٢جاهـ×جتاهـ

في الربع الثالث جا(٢أ) = $٢\left(\frac{-٥}{١٣}\right)\times\left(\frac{-١٢}{١٣}\right) = \frac{١٢٠}{١٦٩}$

في الربع الرابع جا(٢أ) = $٢\left(\frac{-٥}{١٣}\right)\times\left(\frac{١٢}{١٣}\right) = \frac{-١٢٠}{١٦٩}$

زاوية الإسناد: هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية ومحور السينات.

قيم زاوية الإسناد للزاوية هـ :



١) في الربع الأول: زاوية الإسناد = هـ

٢) في الربع الثاني: زاوية الإسناد = ١٨٠ – هـ

٣) في الربع الثالث: زاوية الإسناد = هـ – ١٨٠

٤) في الربع الرابع: زاوية الإسناد = ٣٦٠ – هـ

ملاحظة /

قيم الاقترانات المثلثية لزاوية الإسناد هي ذاتها قيم الاقترانات المثلثية للزاوية الأساسية ، بينما تتحدد إشارة تلك القيمة حسب موضع ضلع انتهاء الزاوية الأساسية في المستوى .

مثال (٧) / أجد قياس زاوية الإسناد للزوايا التي قياساتها ما يأتي:

$$(٢٥٠° ، -١٥٠° ، \frac{٧\pi}{٤}ر)$$

الحل / أ) الزاوية ٢٥٠° تقع في الربع الثالث ولإيجاد زاوية الإسناد نستخدم القاعدة هـ – ١٨٠

إذاً زاوية الإسناد = ٢٥٠° – ١٨٠° = ٧٠°

ب) الزاوية –٢٢٠° تكافئ الزاوية –٢٢٠° + ٣٦٠° = ١٤٠° وتقع في الربع الثاني

إذاً زاوية الإسناد = ١٨٠° – ١٤٠° = ٤٠°

ج) الزاوية $\frac{٧\pi}{٤}$ر تساوي الزاوية $\frac{٧ \times ١٨٠}{٤}$ = ٣١٥° وتقع في الربع الرابع

إذاً زاوية الإسناد = ٣٦٠° – ٣١٥° = ٤٥°

مثال (٨) / أجد قيمة ما يأتي ، دون استخدام الألة الحاسبة:

$$(جا ١٢٠° ، جتا –٣٠٠° ، ظا \frac{٣\pi}{٤}ر)$$

الحل / أ) تقع الزاوية ١٢٠° في الربع الثاني وإشارة جا ١٢٠° موجبة

قياس زاوية الإسناد = ١٨٠° – ١٢٠° = ٦٠°

جا ١٢٠° = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

ب) تقع الزاوية –٣٠٠° في الربع الرابع وإشارة جتا –٣٠٠° موجبة

قياس زاوية الإسناد = ٣٦٠° – ٣٠٠° = ٦٠°

جتا –٣٠٠° = جتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$

ج) تقع الزاوية $\frac{٣\pi}{٤}$ر = $\frac{٣ \times ١٨٠}{٤}$ = ١٣٥° في الربع الثاني وإشارة ظا١٣٥° سالبة

قياس زاوية الإسناد = ١٨٠° – ١٣٥° = ٤٥°

ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ر = –جا٤٥° = – $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

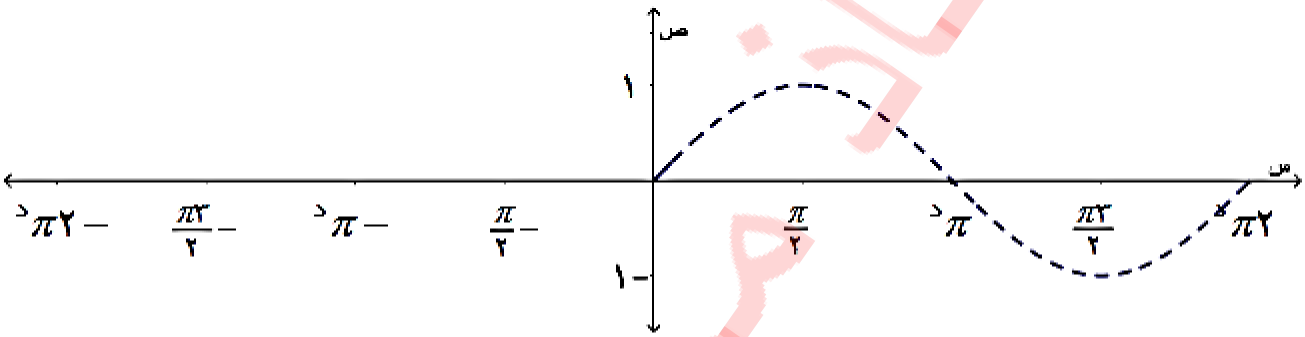
الدرس / تمثيل الاقترانات المثلثية بيانياً

أولاً / اقتران الجيب ق(س) = جاس

١) نكون جدول فيه قياس الزاوية وقيمة جيبها.

س	-٢π	$-\frac{٣\pi}{٢}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
س	-٣٦٠	-٢٧٠	-١٨٠	-٩٠	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠
ق(س) = جاس	٠	١	٠	-١	٠	١	٠	-١	٠

٢) عين النقاط في المستوى الديكارتي ، وأكمل الرسم.

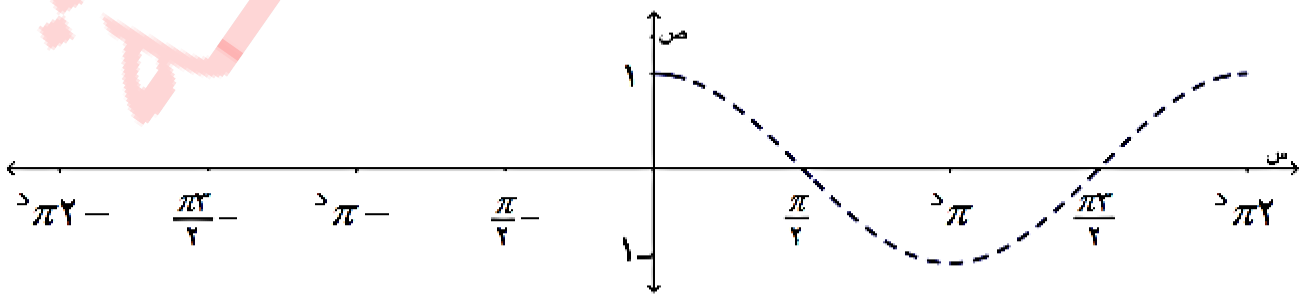


ثانياً / اقتران الجيب تمام ق(س) = جتاس

١) نكون جدول فيه قياس الزاوية وقيمة جيبها.

س	-٢π	$-\frac{٣\pi}{٢}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
س	-٣٦٠	-٢٧٠	-١٨٠	-٩٠	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠
ق(س) = جتاس	١	٠	-١	٠	١	٠	-١	٠	١

٢) عين النقاط في المستوى الديكارتي ، وأكمل الرسم.

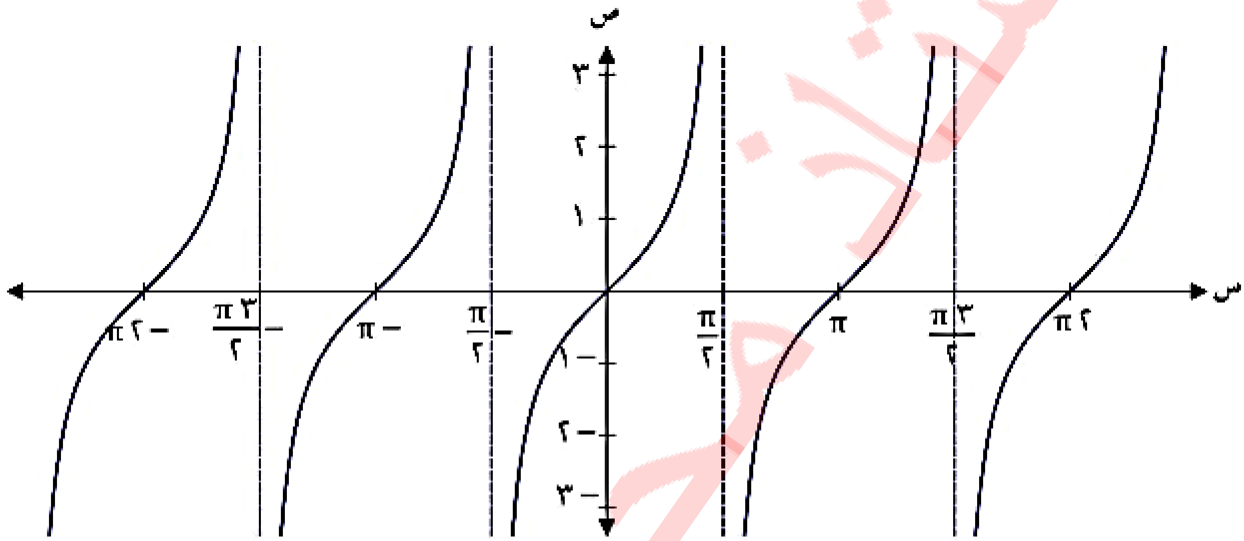


ثالثاً / اقتران الظل ق(س) = ظاس

١) نكون جدول فيه قياس الزاوية وقيمة جيبها.

س	-٢π	$-\frac{٣\pi}{٢}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	٠	$\frac{\pi}{٢}$	π	$\frac{٣\pi}{٢}$	٢π
س	٣٦٠-	٢٧٠-	١٨٠-	٩٠-	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠
ق(س) = ظاس	٠	غير معرفة	٠	غير معرفة	٠	غير معرفة	٠	غير معرفة	٠

٢) عين النقاط في المستوى الديكارتي ، وأكمل الرسم.



خواص الاقترانات المثلثية:

الاقتران	ق(س) = جاس	ق(س) = جتاس	ق(س) = ظاس
المجال	ح	ح	$ح - \left\{\frac{\pi}{٢} + ن\pi\right\}$
المدى	[-١،١]	[-١،١]	ح
أصغر قيمة للاقتران	١-	١-	لا يوجد
أكبر قيمة للاقتران	١	١	لا يوجد
مقدار الدورة	٢π	٢π	π
السعة	١	١	ليس له سعة
نوع الاقتران	فردي لأنه متماثل حول نقطة الأصل	زوجي لأنه متماثل حول محور الصادات	فردي لأنه متماثل حول نقطة الأصل

أتعلم / الاقتران ق(س) = أجا(ب س)+جـ ، أو الاقتران هـ(س) = أجتا(ب س)+جـ . حيث: أ،ب،جـ أعداد حقيقية ، أ،ب ≠ صفر. **فتكون:-**

- ✓ **دورة الاقتران** = $\frac{2\pi}{|ب|}$
- ✓ **سعة الاقتران** = |أ|
- ✓ **أصغر قيمة للاقتران** = −|أ|+جـ
- ✓ **أكبر قيمة للاقتران** = |أ|+جـ
- ✓ **مدى الاقتران** = [أصغر قيمة للاقتران ، أكبر قيمة للاقتران]

مثال (١) / أجد: دورة ، وسعة ، ومدى الاقتران ق(س) = ٤جا$\left(\frac{س}{2}\right)$ − ٣ ، دون تمثيل بيانياً.

الحل / أ = ٤ ، ب = $\frac{1}{2}$ ، جـ = −٣

١) دورة الاقتران = $\frac{2\pi}{|ب|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$

٢) سعة الاقتران = |أ| = |٤| = ٤

٣) أصغر قيمة للاقتران = −|أ|+جـ = −|٤| + −٣ = −٧

أكبر قيمة للاقتران = |أ|+جـ = |٤| + −٣ = ١

مدى الاقتران = [−٧،١]

مثال (٢) / أجد: دورة ، وسعة ، ومدى الاقتران ق(س) = −جا(س) ، دون تمثيل بيانياً.

الحل / أ = −١ ، ب = ١ ، جـ = ٠

١) دورة الاقتران = $\frac{2\pi}{|ب|} = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$

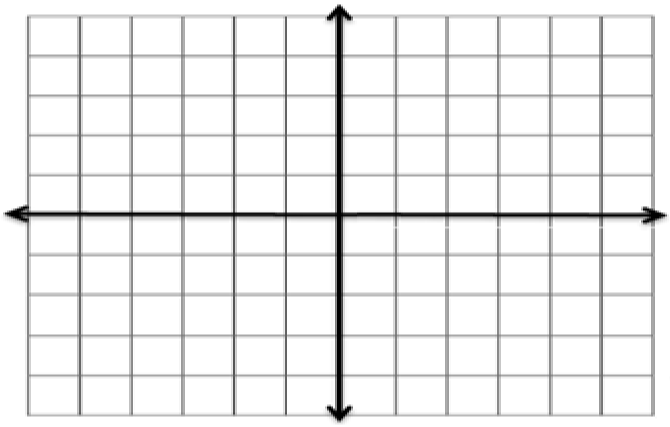
٢) سعة الاقتران = |أ| = |−١| = ١

٣) أصغر قيمة للاقتران = −|أ|+جـ = −|−١|+٠ = −١

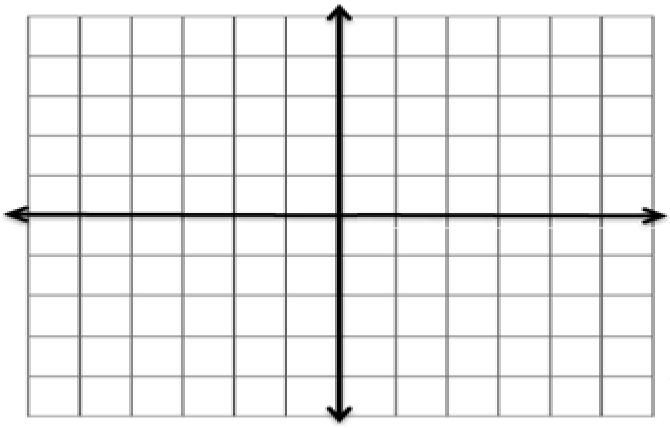
أكبر قيمة للاقتران = −|أ|+جـ = |−١|+٠ = ١

مدى الاقتران = [−١،١]

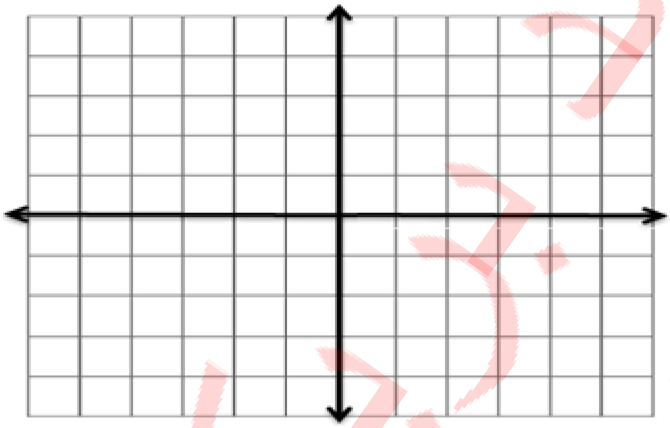
سؤال (١) / أمثل بيانياً منحنى الاقتران ق(س) = جا(س) + ٢



سؤال (٢) / أمثل بيانياً منحنى الاقتران ق(س) = جتا(٢س) − ١



سؤال (٣) / أمثل بيانياً منحنى الاقتران ق(س) = ظا(س) + ١



سؤال (٤) / أجد: دورة ، وسعة ، ومدى الاقتران ق(س) = −٣جا$\left(\frac{س}{٢}\right)$ ، دون تمثيله بيانياً.

....

....

....

الدرس / المتطابقات المثلثية

المتطابقة المثلثية : هي معادلة مثلثية صحيحة لجميع قيم المتغير.

النسب المثلثية الثانوية:

$\text{قاس} = \frac{\text{١}}{\text{جتاس}}$ ، $\text{قتاس} = \frac{\text{١}}{\text{جاس}}$ ، $\text{ظتاس} = \frac{\text{١}}{\text{ظاس}}$

المتطابقات الأساسية الثلاثة:

١) $\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س} = ١$ ومنها ($\text{جتا}^{٢}\text{س} = ١ - \text{جا}^{٢}\text{س}$ ، $\text{جا}^{٢}\text{س} = ١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}$)

٢) $\text{ظا}^{٢}\text{س} + ١ = \text{قا}^{٢}\text{س}$

٣) $\text{ظتا}^{٢}\text{س} + ١ = \text{قتا}^{٢}\text{س}$

أتذكر / قوانين ضعف الزاوية:

أ) $\text{جا(٢هـ)} = \text{٢جاهـ} \times \text{جتاهـ}$

ب) $\text{جتا(٢هـ)} = \text{جتا}^{٢}\text{هـ} - \text{جا}^{٢}\text{هـ}$ ، $\text{جتا(٢هـ)} = ١ - \text{٢جا}^{٢}\text{هـ}$ ، $\text{جتا(٢هـ)} = \text{٢جتا}^{٢}\text{هـ} - ١$

أتذكر / $\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

مثال (١) / زاوية قياسها س درجة بحيث $\text{جاس} = \frac{٣}{٥}$ ، أجد جتاس ، ظاس

الحل / $\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{جا}^{٢}\text{س} = ١ \leftarrow \text{جتا}^{٢}\text{س} + \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢} = ١ \leftarrow \text{جتا}^{٢}\text{س} = ١ - \frac{٩}{٢٥}$

$\text{جتا}^{٢}\text{س} = \frac{١٦}{٢٥}$ (بأخذ الجذر للطرفين) $\text{جتاس} = \frac{٤}{٥}$

$\text{ظاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}} = \frac{\frac{٣}{٥}}{\frac{٤}{٥}} = \frac{٣}{٤}$

سؤال (١) / زاوية قياسها س درجة بحيث $\text{جاس} = \frac{٢}{٣}$ ، أجد جتاس ، ظاس

....

....

....

مثال (٢) / أثبت صحة المتطابقة $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{١−جتاس}} = \text{١+جتاس}$

الحل / نأخذ الطرف الأيمن $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{١−جتاس}} = \frac{\text{١−جتا}^{٢}\text{س}}{\text{١−جتاس}} = \frac{(\text{١−جتاس})(\text{١+جتاس})}{\text{١−جتاس}} = \text{١+جتاس} = \text{الطرف الأيسر}$

مثال (٣) / أثبت صحة المتطابقة $\frac{\text{١+ظا}^{٢}\text{س}}{\text{١+ظتا}^{٢}\text{س}} = \text{ظا}^{٢}\text{س}$

الحل / نأخذ الطرف الأيمن $\frac{\text{١+ظا}^{٢}\text{س}}{\text{١+ظتا}^{٢}\text{س}} = \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{\text{قتا}^{٢}\text{س}} = \frac{\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}}{\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}}} = \frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \text{ظا}^{٢}\text{س} = \text{الطرف الأيسر}$

مثال (٤) / أثبت صحة المتطابقة $\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س} = \text{١} - \text{٢جا}^{٢}\text{س}$

الحل / نأخذ الطرف الأيمن $\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س} = (\text{١} - \text{جا}^{٢}\text{س}) - \text{جا}^{٢}\text{س} = \text{١} - \text{٢جا}^{٢}\text{س} = \text{الطرف الأيسر}$

مثال (٥) / أثبت صحة المتطابقة $(\text{جاس+جتاس})^{٢} = \text{١+جا٢س}$

الحل / نأخذ الطرف الأيمن $(\text{جاس+جتاس})^{٢} = \text{جا}^{٢}\text{س} + \text{٢جاسجتاس} + \text{جتا}^{٢}\text{س}$

$= \text{١} + \text{٢جاسجتاس} = \text{١+جا(٢س)} = \text{الطرف الأيسر}$

مثال (٦) / أثبت صحة المتطابقة $\frac{\text{١−جتاس}}{\text{١+جتاس}} = \left(\frac{\text{١−جتاس}}{\text{جاس}}\right)^{٢}$

الحل / نأخذ الطرف الأيمن $\frac{\text{١−جتاس}}{\text{١+جتاس}}$ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام $\frac{\text{١−جتاس}}{\text{١−جتاس}}$

$\frac{\text{١−جتاس}}{\text{١+جتاس}} \times \frac{\text{١−جتاس}}{\text{١−جتاس}} = \frac{(\text{١−جتاس})^{٢}}{\text{١−جتا}^{٢}\text{س}} = \frac{(\text{١−جتاس})^{٢}}{\text{جا}^{٢}\text{س}} = \left(\frac{\text{١−جتاس}}{\text{جاس}}\right)^{٢} = \text{الطرف الأيسر}$

مثال (٧) / أثبت صحة المتطابقة $\frac{\text{١−جتا٢هـ}}{\text{١+جتا٢هـ}} = \text{ظا}^{٢}\text{هـ}$

الحل / نأخذ الطرف الأيمن $\frac{\text{١−جتا٢هـ}}{\text{١+جتا٢هـ}} = \frac{\text{١} - (\text{١} - \text{٢جا}^{٢}\text{س})}{\text{١} + (\text{٢جتا}^{٢}\text{س} - \text{١})} = \frac{\text{٢جا}^{٢}\text{س}}{\text{٢جتا}^{٢}\text{س}} = \text{ظا}^{٢}\text{س} = \text{الطرف الأيسر}$

مثال (٨) / أثبت صحة المتطابقة $\text{جاس}+\text{جتاس} = \dfrac{٢\text{جا}^{٢}\text{س}-١}{\text{جاس}-\text{جتاس}}$

الحل / نأخذ الطرف الأيسر $\dfrac{٢\text{جا}^{٢}\text{س}-١}{\text{جاس}-\text{جتاس}} = \dfrac{٢\text{جا}^{٢}\text{س}-\left(\text{جا}^{٢}\text{س}+\text{جتا}^{٢}\text{س}\right)}{\text{جاس}-\text{جتاس}} = \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س}-\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جاس}-\text{جتاس}}$

$= \dfrac{\left(\text{جاس}-\text{جتاس}\right)\left(\text{جاس}+\text{جتاس}\right)}{\text{جاس}-\text{جتاس}} = \text{جاس}+\text{جتاس} =$ الطرف الأيمن

مثال (٩) / أثبت صحة المتطابقة $\text{جتا}^{٢}\text{س}+\left(\text{ظاس}\text{جتاس}\right)^{٢}=١$

الحل / نأخذ الطرف الأيمن $\text{جتا}^{٢}\text{س}+\left(\text{ظاس}\text{جتاس}\right)^{٢}=\text{جتا}^{٢}\text{س}+\left(\dfrac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\times\text{جتاس}\right)^{٢}$

$=\text{جتا}^{٢}\text{س}+\left(\text{جاس}\right)^{٢}=١=$ الطرف الأيسر

سؤال (٢) / أثبت صحة المتطابقة $\dfrac{\text{جتاس}}{١+\text{جاس}}=\dfrac{١-\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

....

....

....

....

سؤال (٣) / أثبت صحة المتطابقة $\text{ظاس}+\text{ظتاس}=\text{قاس}\times\text{قتاس}$

....

....

....

....

....

الدرس / المعادلات المثلثية

المعادلة المثلثية : هي جملة مفتوحة تحتوي اقتراناً مثلثياً وتكون صحيحة لبعض قيم المتغير.

أتذكر / إذا كانت ∡س+∡ص = ٩٠° (س،ص متتامتان)

فإن جاس =جتاص ، جتاس =جاص

مثال (١) / حل المعادلة المثلثية جا(٢س +٣٠) =جتا٤س ، صفر ≥ س ≥ ٩٠°

الحل / ٢س +٣٠ +٤س = ٩٠

٦س = ٩٠ – ٣٠

٦س = ٦٠ (بالقسمة على ٦) س = ١٠

سؤال (١) / حل المعادلة المثلثية جتا(٣س +٥٠) =جا٥س ، صفر ≥ س ≥ ٩٠°

....

....

....

مثال (٢) / حل المعادلة ٢جاس – ١ = صفر ، صفر ≥ س ≥ ٢π

الحل / ٢جاس – ١ = صفر ← ٢جاس = ١ ← جاس = $\frac{1}{2}$

إذاً س = ٣٠°

بما أن قيمة جاس موجبة إذاً تقع في الربع الأول (س = ٣٠°)

أو في الربع الثاني (س = ١٨٠° – ٣٠° = ١٥٠°)

مجموعة الحل = {٣٠°، ١٥٠°}

مثال (٣) / أجد مجموعة حل المعادلة: جتا^{2}س + ٢جتاس – ٣ = صفر ، صفر ≥ س ≥ ٢π

الحل / جتا^{2}س + ٢جتاس – ٣ = صفر

(جتاس + ٣)(جتاس – ١) = صفر

إما جتاس = –٣ (مرفوضة) أو جتاس = ١

إذاً س = ٠° أو س = ٣٦٠°

مجموعة الحل = {٠°، ٣٦٠°}

مثال (٤) / أجد مجموعة حل المعادلة: جاس جتاس $-\frac{١}{٢}$جاس = صفر ، صفر ≤ س ≤ ٢π

الحل / جاس جتاس $-\frac{١}{٢}$جاس = صفر ← (جاس)(جتاس $-\frac{١}{٢}$) = صفر

إما جاس = صفر ← س = ٠° أو س = ١٨٠° أو س = ٣٦٠°

أو جتاس = $\frac{١}{٢}$ ← س = ٦٠°

بما أن قيمة جتاس موجبة إذاً تقع في الربع الأول (س = ٦٠°)

أو في الربع الرابع (س = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°)

مجموعة الحل = {٠°، ١٨٠°، ٣٦٠°، ٦٠°، ٣٠٠°}

مثال (٥) / أجد مجموعة حل المعادلة: ظا^{٢}س + ١ = ٢ ، صفر ≤ س ≤ ٢π

الحل / ظا^{٢}س + ١ = ٢ ← ظا^{٢}س = ٢ − ١ ← ظا^{٢}س = ١ (بأخذ الجذر للطرفين) ظاس = ±١

عندما ظاس = ١ ، س = ٤٥°

بما أن قيمة ظاس موجبة إذاً تقع في الربع الأول (س = ٤٥°)

أو في الربع الثالث (س = ١٨٠° + ٤٥° = ٢٢٥°)

عندما ظاس = −١ ، س = ٤٥°

بما أن قيمة ظاس سالبة إذاً تقع في الربع الثاني (س = ١٨٠° − ٤٥° = ١٣٥°)

أو في الربع الرابع (س = ٣٦٠° − ٤٥° = ٣١٥°)

مجموعة الحل = {٤٥°، ٢٢٥°، ١٣٥°، ٣١٥°}

سؤال (٢) / حل المعادلة ٢جا^{٢}س − ١ = صفر ، صفر ≤ س ≤ ٢π

....

....

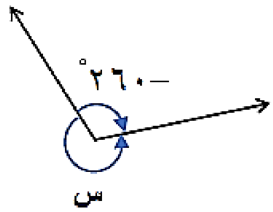
....

....

....

تمارين الوحدة

السؤال الأول: أختر رمز الاجابة الصحيحة :



١) ما قياس الزاوية س في الشكل المقابل

أ) ١٠٠°　　ب) –١٠٠°　　ج) ٢٦٠°　　د) –٢٦٠°

٢) ما الربع الذي تقع فيه الزاوية -٥٠٠ ؟

أ) الأول　　ب) الثاني　　ج) الثالث　　د) الرابع

٣) أي القياسات التالية قياس لزاوية ربعية

أ) ١٢٠°　　ب) ١٩٠°　　ج) –٣٠٠°　　د) –٣٦٠°

٤) الزاوية $\frac{٥\pi}{٤}$ ر تعادل بالتقدير الستيني الزاوية

أ) ٤٥°　　ب) ١٣٥°　　ج) ٢٢٥°　　د) ٣١٥°

٥) زاوية قياسها ٨٤.٠ ر ، ما قيمة قياسها بالدرجات ؟

أ) ٢٧.٥°　　ب) ٨٦.٤°　　ج) ١.٥°　　د) ٤.٨°

٦) ما قياس الزاوية –١٢٠° بالدائري

أ) π ر　　ب) $-\frac{٣\pi}{٤}$ ر　　ج) $-\frac{٢\pi}{٣}$ ر　　د) $-\frac{٣\pi}{٢}$ ر

٧) أي الزوايا التالية لا يمكن أن تكون زاوية إسناد ؟

أ) ٢٠°　　ب) ٣٠°　　ج) ٤٥°　　د) ٩١°

٨) ما قياس زاوية الاسناد للزاوية التي قياسها ١٢٠°

أ) ١٢٠°　　ب) ٦٠°　　ج) –٦٠°　　د) ٣٠°

٩) ما سعة الاقتران ق(س) = –٢جا٣س+١

أ) -٢　　ب) ٢　　ج) ٣　　د) ١

١٠) ما مدى الاقتران ق(س) = ظاس ؟

أ) [٠ ، ١]　　ب) [-١ ، ١]　　ج) [-٢ ، ٢]　　د) ح

السؤال الثاني: أكمل الفراغ بما يناسبه :

١) الزاوية الموجبة المكافئة للزاوية $\frac{\pi}{٦}$ هي ....

٢) الزاوية السالبة المكافئة للزاوية -٣٠٠° هي ....

٣) زاوية الإسناد للزاوية ٣٣٠ هي .... ، بينما زاوية الإسناد للزاوية ١٦٠° هي ....

٤) إذا كان ظاس = $\frac{٣}{٥}$ ، فإن جتاس = ...

٥) إذا كان ق(س) = ٣ جتا (٢س) – ١ ، فإن أكبر قيمة للاقتران = ...

٦) دورة الاقتران ق(س) = ٣ جتا($\frac{س}{٢}$) هي ....

٧) مدى الاقتران ق(س) = جا (س) + ٢ هو ....

السؤال الثالث: أ زاوية منعكسة بحيث أن جتا أ = $\frac{٣}{٥}$ ، أجد قيمة جا ٢أ ، جتا ٢أ ؟

....

....

....

....

السؤال الرابع: أجد قيمة ما يلي باستخدام القوانين المناسبة ودون استخدام الألة الحاسبة :

١) جتا$\frac{٧\pi}{٤}$ = ...

٢) ٤ جا$\frac{\pi}{٦}$جتا$\frac{\pi}{٦}$ = ...

السؤال الخامس : أثبت صحة المتطابقة التالية:

جاس ظاس+جتاس =قاس

....

....

....

....

السؤال السادس : حل المعادلة المثلثية التالية:

جا^{٢}س – ٢جاس+١ = ٠

....

....

....

....

الدرس / الإنشاءات الهندسية (١)

الإنشاء الهندسي : هو رسم الأشكال والزوايا بدقة ، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار فقط .

خطوات تنصيف القطعة المستقيمة أب باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار :

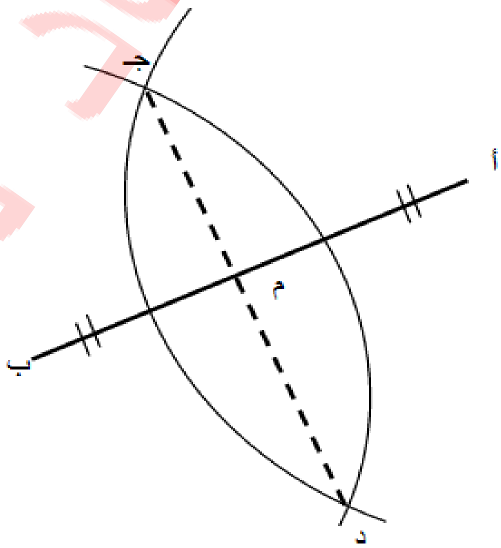
١ـ أفتح الفرجار فتحة أكبر من نصف طول القطعة المستقيمة .

٢ـ أثبت الفرجار على النقطة (أ) وأرسم قوسين صغيرين أحدهما لأعلى والأخر لأسفل .

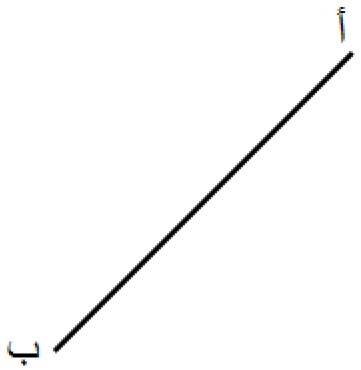
٣ـ أثبت الفرجار على النقطة (ب) وأرسم قوسين أخرين يقطعان القوسين الأولين .

٤ـ أصل بين نقطتي تقاطع الأقواس .

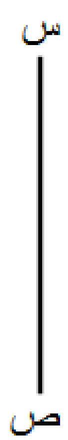
مثال (١) / أنصف القطعة المستقيمة التالية :



سؤال (١) / أنصف القطعة المستقيمة التالية :



سؤال (٢) / أنصف القطعة المستقيمة التالية :



سؤال (٣) / أنصف القطعة المستقيمة التالية :

خطوات تنصيف الزاوية ∢أبجـ باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار :

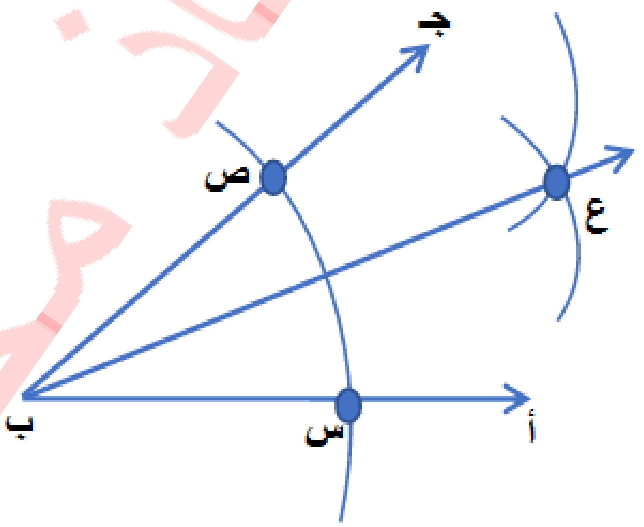
١ـ أفتح الفرجار فتحة مناسبة وأثبت رأس الفرجار على رأس الزاوية ∢ب و أرسم قوساً يقطع ضلعي الزاوية في النقطتين س ، ص .

٢ـ أثبت الفرجار عند النقطة (س) وأرسم قوس بفتحة مناسبة .

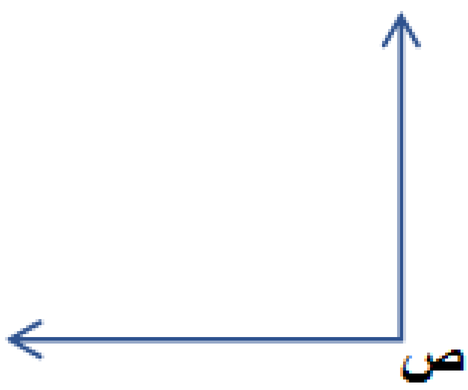
٣ـ أثبت الفرجار عند النقطة (ص) وأرسم قوساً أخر بنفس الفتحة ليقطع القوس الأول في النقطة ع .

٤ـ أصل بين رأس الزاوية و نقطة تقاطع الأقواس (ع) .

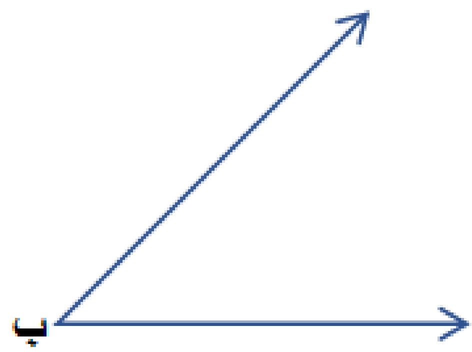
مثال (٢) / أنصف الزاوية التالية :



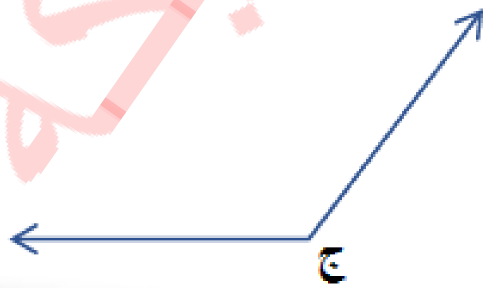
سؤال (٤) / أنصف الزاوية التالية :



سؤال (٥) / أنصف الزاوية التالية :



سؤال (٦) / أنصف الزاوية التالية :



الدرس / القطعة المتوسطة في المثلث

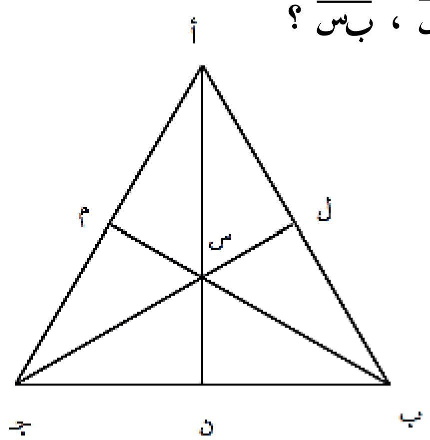
القطعة المتوسطة في المثلث / هي القطعة المستقيمة الواصلة بين أحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابل له .

أتعلم / ١- القطعة المتوسطة تقسم المثلث إلى مثلثين متساويين في المساحة .

٢- تتقاطع القطع المتوسطة للمثلث في نقطة واحدة .

٣- نقطة تقاطع القطع المتوسطة تقسم كل قطعة منها بنسبة ٢ : ١ من جهة رأس المثلث .

مثال (١) / في المثلث المجاور ا ب جـ ، فيه النقطة ل منتصف ا ب ، والنقطة ن منتصف ب جـ ، والنقطة م منتصف ا جـ ، وطول س جـ = ٨ سم ، طول س م = ٣ سم ، أجد طول ل س ، ب س ؟



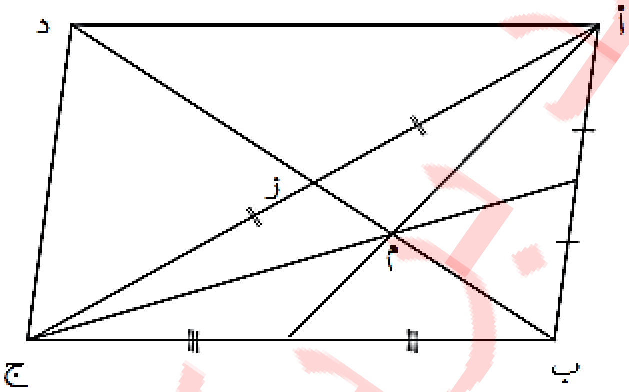
الحل /

حسب النسبة ٢ : ١ من جهة رأس المثلث .

س جـ من جهة رأس الزاوية = ٨ سم ، إذاً ل س = ٤ سم

س م = ٣سم ، إذاً ب س من جهة رأس الزاوية = ٦ سم

مثال (٢) / أ ب جـ د متوازي أضلاع ، إذا كانت ز نقطة تقاطع القطرين ، ب د = ٢٤ سم ، م نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث أ ب جـ ، أجد م ز .



الحل / بما أن ب د = ٢٤ ، ز نقطة تقاطع الأضلاع حسب خصائص متوازي الأضلاع ز منتصف ب ، إذاً

ب ز = ١٢.

بما أن م نقطة تلاقي القطع المتوسطة في المثلث أ ب جـ ،

إذاً م ز : م ب = ١ : ٢

نفرض طول م ز = س ، إذاً طول ب م = ٢س.

س + ٢س = ١٢

٣س = ١٢ (بالقسمة على ٣) س = ٤ = م ز

الدرس / رسم المضلع السداسي

المضلع المنتظم / هو شكل هندسي مغلق أطوال أضلاعه متساوية وزواياه الداخلية متساوية .

المضلع السداسي المنتظم / هو المضلع المنتظم ذو أكبر عدد من الأضلاع ، الذي يصلح لتغطية مساحة بالكامل . إضافة إلى أنه المضلع الذي يعطي أكبر مساحة بأقصر محيط .

خطوات رسم المضلع السداسي المنتظم :

١- نرسم دائرة مركزها م ، ونصف قطرها أ م .

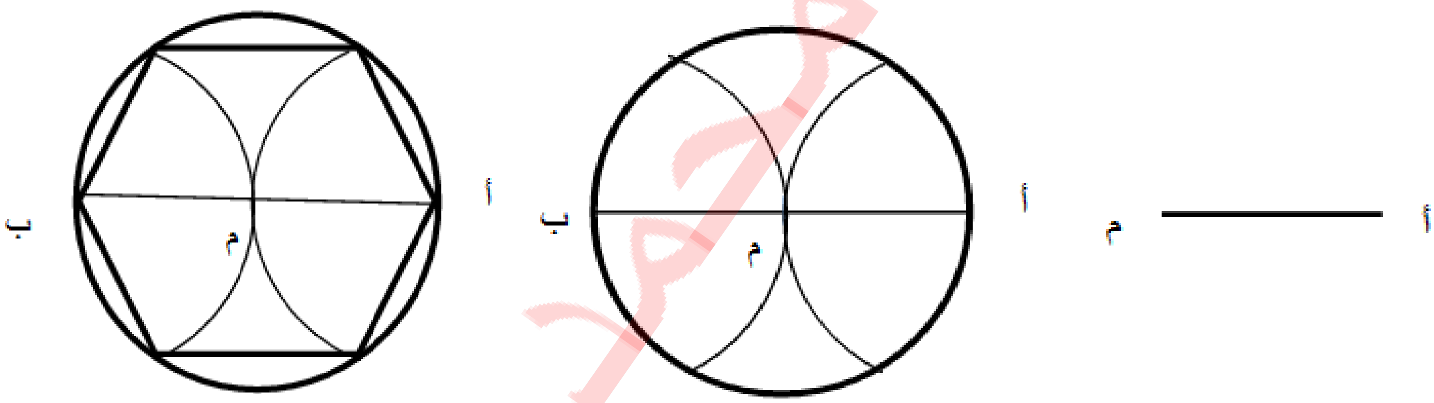
٢- أكمل رسم القطر أ ب .

٣- بنفس الفتحة (أ م) نرسم قوساً من دائرة مركزها النقطة أ فتقطع الدائرة في النقطتين جـ ، د .

٤- نرسم قوساً أخر مركزه النقطة ب ، وأحدد نقاط تقاطعه مع الدائرة هـ ، و .

٥- أصل بين نقاط تقاطع القوسين مع الدائرة ، ونهايتها قطر الدائرة .

مثال (١) / أرسم مضلعاً سداسياً منتظماً أحد أضلاعه أ م ، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار .



سؤال (١) / أرسم مضلعاً سداسياً منتظماً أحد أضلاعه أ م ، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار .

الدرس / تكافؤ الأشكال الهندسية

الشكلان الهندسيان المتكافئان / هما شكلان متساويان في المساحة .

أتعلم / ١ ـ إذا تطابق شكلان هندسيان فإنهما متكافئان والعكس ليس صحيح .

٢ ـ القطر في متوازي الأضلاع يقسمه إلى مثلثين متطابقين .

٣ ـ القطعة المتوسطة في المثلث تقسمه إلى مثلثين متكافئين .

نظريات التكافؤ /

١) متوازيا الأضلاع المشتركان في القاعدة ، والمحصوران بين مستقيمين متوازيين يكونان متكافئين .

٢) متوازي الأضلاع يكافئ المستطيل المشترك معه في القاعدة والمحصورين بين مستقيمين متوازيين .

٣) مساحة المثلث $=$ $\frac{١}{٢}$ مساحة متوازي الأضلاع المشترك معه في القاعدة والمحصورين بين مستقيمين متوازيين .

٤) المثلثان المحصوران بين مستقيمين متوازيين ولهما القاعدة نفسها متكافئان .

أتذكر / * مساحة المثلث $=$ $\frac{١}{٢}$ $\times$ القاعدة $\times$ الارتفاع

* مساحة متوازي الأضلاع $=$ القاعدة $\times$ الارتفاع

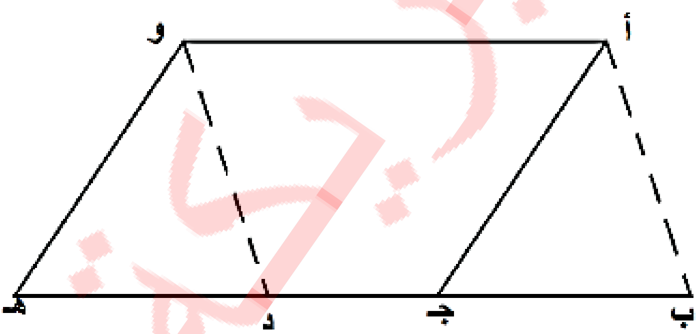
* مساحة المستطيل $=$ الطول $\times$ العرض

* مساحة المربع $=$ طول الضلع $\times$ نفسه

مثال (١) / في الشكل المجاور $\overline{\text{اب}} \parallel \overline{\text{ود}}$ ، $\overline{\text{اجـ}} \parallel \overline{\text{وهـ}}$ ، $\overline{\text{او}} \parallel \overline{\text{بهـ}}$. أبين أن :

أ) مساحة ا ب د و تساوي مساحة اجـهـ و .

ب) المثلث ا ب جـ يكافئ المثلث ودهـ .



الحل /

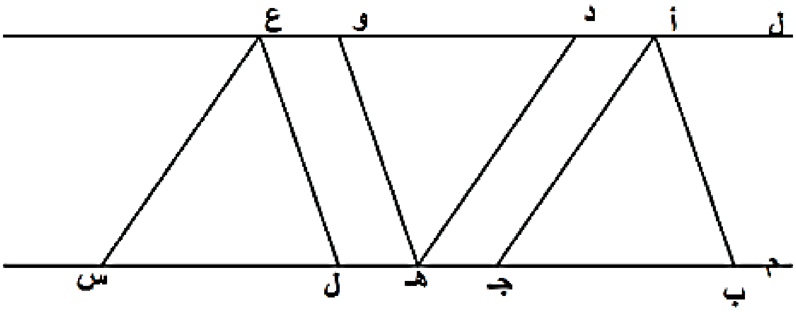
أ) مساحة متوازي الأضلاع ا ب د و = مساحة اجـهـ و ، لأنهما مشتركان في القاعدة ومحصوران بين متوازيين

ب) مساحة المثلث ا ب جـ = مساحة متوازي الاضلاع ا ب د و – مساحة شبه المنحرف اجـد و

و مساحة المثلث ودهـ = مساحة متوازي الاضلاع اجـهـ و – مساحة شبه المنحرف اجـد و

من الفرع (أ) ينتج أن مساحة المثلث ا ب جـ = مساحة المثلث ودهـ ، أي أنهما متكافئان وهو المطلوب .

مثال (٢) / ل ، م مستقيمان متوازيان ، ب جـ = د و = ل س ، أبين أن المثلث أ ب جـ ، والمثلث د ه و ، والمثلث ع ل س مثلثات متكافئة .



الحل /

بما أن ب جـ = د و = ل س (قواعد المثلثات) متساوية و المثلثات محصورة بين مستقيمين متوازيين إذاً المثلثات متكافئة.

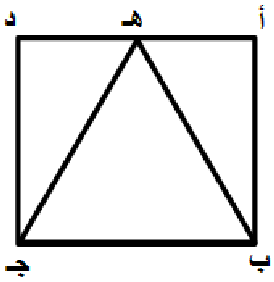
مثال (٣) / أ ب جـ د مربع هـ ب جـ أنشئ على قاعدته $\overline{\text{ب جـ}}$ مثلث مساحته ١٨ سم^{٢} ، بحيث تقع النقطة هـ على $\overline{\text{أ د}}$. أجد : أ) مساحة المربع أ ب جـ د .

ب) طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

الحل / المثلث هـ ب جـ ، والمربع أ ب جـ د يشتركان في القاعدة و يقعان بين أضلاع المربع المتوازية

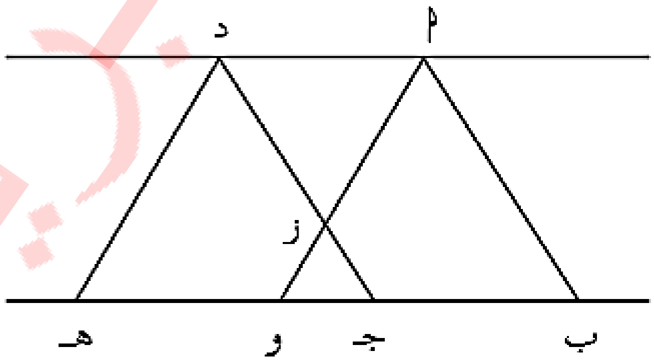
أ) مساحة المربع أ ب جـ د = ٢ × مساحة المثلث هـ ب جـ

= ٢ × ١٨ = ٣٦ سم^{٢}



ب) طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ سم

مثال (٤) / أ ب جـ د ، أ و هـ د متوازيا أضلاع مشتركان في القاعدة $\overline{\text{أ د}}$ ، ومحصوران بين مستقيمين متوازيين كما في الشكل المجاور . بين أن الشكل أ ب جـ ز يكافئ د ز و هـ.



الحل / بما أن أ ب جـ د ، أ و هـ د متوازيا أضلاع مشتركان في القاعدة $\overline{\text{أ د}}$ ، ومحصوران بين مستقيمين متوازيين

اذاً مساحة أ ب جـ د = مساحة أ و هـ د

بطرح Δ أ ز د من الطرفين

ينتج أن مساحة الشكل أ ب جـ ز = مساحة الشكل د ز و هـ أي أنهما متكافئان.

تمارين الوحدة

السؤال الأول: أختر رمز الاجابة الصحيحة :

١) هو رسم الأشكال والزوايا بدقة ، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار فقط

أ) الهندسة   ب) الانشاء الهندسي   ج) القطعة المستقيمة   د) الزاوية

٢) نقطة تقاطع القطع المتوسطة تقسم كل قطعة منها بنسبة ٢ : ١ من جهة

أ) قاعدة المثلث   ب) رأس المثلث   ج) الضلع المقابل   د) الوتر

٣) المضلع الذي يغطي أكبر مساحة بأقصر محيط

أ) المربع   ب) الخماسي المنتظم   ج) السداسي المنتظم   د) السباعي المنتظم

٤) ماذا يسمى الشكلان المتساويان في المساحة ؟

أ) متطابقين   ب) متشابهين   ج) متكافئين   د) غير ذلك

٥) أي العبارات التالية ليست صحيحة

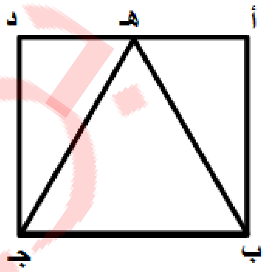
أ) الشكلان المتكافئان متطابقان

ب) الشكلان المتطابقان متكافئان

ج) الشكلان الهندسيان المتكافئان هما شكلان متساويان في المساحة

د) متوازيا الأضلاع المشتركان في القاعدة ومحصوران بين مستقيمين متوازيين متكافئان

٦) في الشكل المجاور أ ب جـ د مستطيل مساحته ١٢ سم^2 ، ما مساحة المثلث هـ جـ ب ؟



أ) ٨ سم^2 ب) ٦ سم^2

ج) ٤ سم^2 د) ٣ سم^2

السؤال الثاني: اب جـ مثلث ، مساحته ٣٦ سم^2 ، $\overline{\text{ا ر}}$ قطعة متوسطة في المثلث ، إذا أنزل عمود من النقطة د على الضلع $\overline{\text{ا جـ}}$ طوله ٦ سم ، أجد طول $\overline{\text{ا جـ}}$.

....

....

....

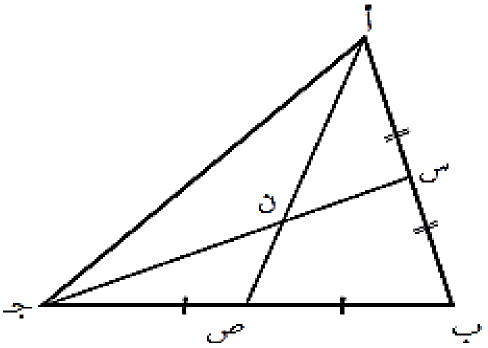
السؤال الثالث: أص ، جس قطع متوسطة في المثلث ابج ، وطول ن ص = ٨ سم أجد :

أ) طول أن

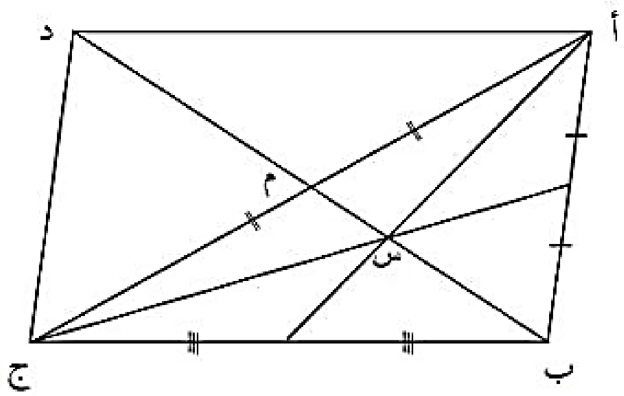
....

ب) طول أص

....



السؤال الرابع: أب ج د متوازي أضلاع ، إذا كانت م نقطة تقاطع القطرين ، طول ب د = ٣٦ سم ، س نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث أ ب ج ، أجد س م .



....

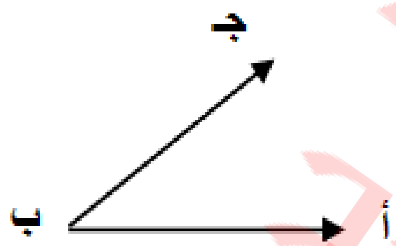
....

....

....

....

السؤال الخامس: أنصف الأشكال الهندسية التالية باستخدام الإنشاءات الهندسية .



السؤال السادس: أرسم شكل سداسي ، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار .

الدرس / الأسهم

السهم: عبارة عن صك يثبت أن لحامله حصة في ملكية شركة ولحامله نسبة من أرباح وخسائر الشركة.

القيمة الأسمية للسهم: هي قيمة السهم عند الشراء ، وتكتب على شهادة السهم ، وتحسب الأرباح بناء عليها.

القيمة الحالية للسهم: هي قيمة السهم في السوق المالي لحظة التداول.

ملاحظة/ يعتمد في حساب الأرباح في الأسهم **الربح البسيط**

قوانين الدرس :

١) مقدار ربح الأسهم = عدد الأسهم × القيمة الأسمية للسهم × نسبة الربح

٢) القيمة الحالية للأسهم = القيمة الحالية للسهم × عدد الأسهم

٣) النسبة المئوية الفعلية للربح من الأسهم = $\frac{\text{مقدار الربح}}{\text{القيمة الحالية للأسهم}}$ × ١٠٠٪

الأن سنستخدم قوانين الدرس في حل الأسئلة التالية ، هيا بنا

مثال (١) / يملك عمر ٣٠٠ سهم في أحد البنوك الفلسطينية ، القيمة الأسمية للسهم ٣ دنانير ، وقيمته الحالية ٣,٧ دينار ، فإذا وزع البنك أرباحاً قيمتها ٢٠٪ ، أحسب :

أ) مقدار ربح عمر .

ب) القيمة الحالية لأسهم عمر .

ج) النسبة المئوية الفعلية للربح .

الحل / أ) مقدار الربح = عدد الأسهم × القيمة الأسمية للسهم × نسبة الربح

= ٣٠٠ × ٣ × ٢٠٪ = ١٨٠ دينار

ب) القيمة الحالية للأسهم = القيمة الحالية للسهم × عدد الأسهم

= ٣,٧ × ٣٠٠ = ١٠٢٠ دينار

ج) النسبة المئوية للربح = $\frac{\textbf{مقدار الربح}}{\textbf{القيمة الحالية للأسهم}}$ × ١٠٠٪

= $\frac{١٨٠}{١٠٢٠}$ × ١٠٠٪ = ١٧.٦٪

مثال (٢) / قامت شركة للتجارة العامة بطرح أسهم للاكتتاب ، القيمة الاسمية للسهم ٥ دنانير، وبعلاوة إصدار مقدارها ٣ دنانير ، اكتتب عامر ٥٠٠ سهم ، فإذا وزعت الشركة ربحاً مقداره ١٢٪ ، أحسب :

أ) قيمة الأسهم التي اكتتب بها عامر .

ب) مقدار الربح الذي سيحصل عليه عامر .

ج) النسبة المئوية الفعلية لأرباح عامر علماً بأن قيمة السهم الحالية ٨ دنانير .

الحل / أ) قيمة جميع الأسهم = ٥٠٠ × (٥+٣) = ٥٠٠ × ٨ = ٤٠٠٠ دينار

ب) مقدار ربح الأسهم = عدد الأسهم × القيمة الأسمية للسهم × نسبة الربح

= ٥٠٠ × ٥ × ١٢٪ = ٣٠٠ دينار

ج) النسبة المئوية الفعلية للربح من الأسهم = $\frac{\text{مقدار الربح}}{\text{القيمة الحالية للأسهم}}$ × ١٠٠٪

= $\frac{٣٠٠}{٥٠٠ \times ٨}$ × ١٠٠٪ = ٧.٥٪

مثال (٣) / أشترى مهدي ٢٠٠ سهم من شركة للتجارة العامة ، القيمة الاسمية للسهم ١٢ دينار، فإذا كانت الأرباح المستحقة له في نهاية العام ٣٦٠ دينار ، أجد نسبة الربح الذي حددتها الشركة .

الحل / مقدار ربح الأسهم = عدد الأسهم × القيمة الأسمية للسهم × نسبة الربح

٣٦٠ = ٢٠٠ × ١٢ × س

٣٦٠ = ٢٤٠٠× س (بالقسمة على ٢٤٠٠) س = ١٥٪

سؤال (١) / يملك أحمد ٤٠٠ سهم في مصنع الصخرة للمنظفات ، قيمة السهم الأسمية دينارين ، وقيمته الحالية دينار ونصف ، فإذا وزع المصنع أرباحاً قيمتها ٦٪ ، أحسب ؟

أ) مقدار ربح أحمد .

ب) النسبة المئوية الفعلية للربح .

....

....

....

....

....

الدرس / السندات

السندات: هي أوراق مالية تصدرها الحكومات أو الشركات بقيمة معينة تثبت بأن مالكها دائن للجهة المصدرة للسند ، وهو أحد أدوات الاستثمار المضمون التي توفر عائداً جيداً للمستثمرين ، مقابل مخاطرة مقبولة.

القيمة الأسمية للسند: مقدار المبلغ الذي يدفعه المستثمر عند شراء السند من الشركة ، وهو القيمة المكتوبة على السند وتحسب على أساسها الفائدة.

القيمة التجارية للسند: المبلغ الذي يباع فيه السند في السوق المالي.

تاريخ الاستحقاق: الوقت المحدد لسداد القيمة الأسمية للسند.

ملاحظة/ حامل السند ليس مالكاً في الشركة.

قوانين الدرس :

١) مقدار الربح السنوي للسندات = عدد السندات × القيمة الأسمية للسند × نسبة الفائدة

٢) مقدار الربح الكلي للسندات = مقدار الربح السنوي × عدد السنوات (فترة الاستحقاق)

٣) العائد = القيمة الأسمية السندات + الربح الكلي

الأن سنستخدم قوانين الدرس في حل الأسئلة التالية ، هيا بنا

مثال (١) / أشترت مريم ٩٠٠ سند قبض ، القيمة الأسمية للسند الواحد ٧ دنانير ، والقيمة التجارية ١١ دينار ، أحسب:

أ) القيمة الاسمية للسندات

ب) القيمة التجارية للسندات

ج) مقدار الربح عند بيع السندات

الحل / أ) القيمة الاسمية للسندات = عدد السندات × القيمة الأسمية للسند

= ٩٠٠ × ٧ = ٦٣٠٠ دينار

ب) القيمة التجارية للسندات = عدد السندات × القيمة التجارية للسند الواحد

= ٩٠٠ × ١١ = ٩٩٠٠ دينار

ج) مقدار الربح عند بيع السندات = القيمة التجارية – القيمة الأسمية

= ٩٩٠٠ – ٦٣٠٠ = ٣٦٠٠ دينار

مثال (٢) / طرح صاحب مصنع للدراجات الهوائية مجموعة من السندات للجمهور ، من أجل زيادة رأسمال مصنعه ، بفائدة قدرها ٨,٥ ٪ سنوياً ، قرر وليد الاستثمار في هذا المصنع بمبلغ ١٢٠٠ دينار فاشترى ٦ سندات ، أجد:

أ) قيمة السند الواحد
ب) ربح عامر السنوي
ج) العائد بعد ٥ سنوات

الحل / أ) قيمة السند الواحد = ١٢٠٠ ÷ ٦ = ٢٠٠ دينار

ب) ربح وليد السنوي = عدد السندات × القيمة الأسمية للسند × نسبة الفائدة

= ٦ × ٢٠٠ × ٨,٥ ٪ = ١٠٢ دينار

ج) العائد بعد ٥ سنوات = المبلغ الأصلي + (مقدار الربح السنوي × عدد السنوات)

= ١٢٠٠ + (١٠٢ × ٥) = ١٢٠٠ + ٥١٠ = ١٧١٠ دينار

مثال (٤) / أشترى محمود ٢٠٠ سند ، بفائدة سنوية ٨ ٪ ، فكان ربحه في نهاية السنة ٢٧٢ دينار ، أجد القيمة الأسمية للسند الواحد .

الحل / الربح السنوي = عدد السندات × القيمة الأسمية للسند × نسبة الفائدة

٢٧٢ = ٢٠٠ × س × ٨ ٪

٢٧٢ = ١٦ س (بالقسمة على ١٦)

س = ١٧ دينار وهي القيمة الأسمية للسهم

سؤال (١) / أشترى جمال ٢٢٠ سنداً ، القيمة الأسمية للسند الواحد ١٦ دينار ، إذا كانت السندات تعطي ربحاً مقداره ٥ ٪ ، وفترة استهلاك السند ٧ سنوات ، أحسب:

أ) الربح السنوي الذي يقبضه جمال.
ب) مجموع الأرباح التي يقبضها بعد انتهاء فترة استهلاك السند.

....

....

....

....

الدرس / التأمين

عقد التأمين: عقد بين شركة التأمين وشخص أو أشخاص يدفع بموجبه الشخص مبلغاً من المال للشركة ، على أن تعوضه عن جزء أو كل العقار أو البضاعة المؤمن عليها عند تعرضها للأخطار أو الخسائر .

خطوات حل مسائل التأمين:

١) نحسب مقدار ما دفعه الشخص (الأشخاص) لشركة التأمين.
٢) نحسب مقدار ما دفعته شركة التأمين للشخص (الأشخاص).
٣) نجد ربح أو خسارة شركة التأمين (المبلغ الأكبر – المبلغ الأصغر)

ملاحظة/ إذا دفعت شركة التأمين أكبر مما دفع لها الشخص تكون خسرت أما إذا دفعت أقل مما دفع لها الشخص تكون قد ربحت .

مثال (١) / قام علاء بالتأمين على سيارته بمبلغ ١٥٠٠ دينار لدى شركة للتأمين ، على أن يدفع قسطاً شهرياً مقداره ١٥ دينار ، على أن تقوم الشركة بالتعويض عن أي ضرر يلحق بهذه السيارة بعد خصم ٤٪ من المبلغ المؤمن به استهلاكاً سنوياً ، فإذا احترقت السيارة بعد مضي ٦ سنوات من توقيع العقد أحسب :

أ) مقدار ما دفعه علاء للشركة في ٦ سنوات.
ب) مقدار الاستهلاك من قيمة السيارة في ٦ سنوات.
ج) مقدار ما تدفعه الشركة لعلاء كتعويض.
د) ربح أو خسارة الشركة في هذا التأمين.

الحل / أ) ١٥ × ١٢ × ٦ = ١٠٨٠ دينار

ب) ١٥٠٠ × ٤٪ × ٦ = ٣٦٠ دينار

ج) ١٥٠٠ – ٣٦٠ = ١١٤٠ دينار

د) مقدار خسارة الشركة = مقدار ما تدفعه الشركة – ما دفعه علاء = ١١٤٠ – ١٠٨٠ = ٦٠ دينار

مثال (٢) / قامت أحدى شركات المعدات الكهربائية باستيراد أجهزة كهربائية بقيمة ١٥٠٠٠٠ دينار ، على أن تدفع لشركة التأمين ٦٪ من هذا المبلغ كتأمين على هذه الأجهزة ، فإذا تلف من الأجهزة ما قيمته ٢٠٠٠ دينار ، أحسب مقدار ربح أو خسارة شركة التأمين :

الحل / مقدار ربح الشركة = ما دفعته شركة المعدات الكهربائية – مقدار ما تدفعه شركة التأمين

= ٢٠٠٠ –(١٥٠٠٠٠ × ٦٪)

= ٢٠٠٠ – ٩٠٠٠ = ٧٠٠٠ دينار

مثال (٣) / أمن معصتم على حياته لدى شركة تأمين بمبلغ ٢٠٠٠٠ دينار ، بقسط سنوي مقداره ١٠٪ من قيمة التأمين ولمدة ٢٠ سنة ، على أن يدفع القسط السنوي على أقساط شهرية متساوية ، فإذا توفي سعيد بعد مرور ١٢ عاماً ، أجد :

أ) مقدار القسط السنوي .

ب) مقدار خسارة أو ربح الشركة .

الحل / أ) ٢٠٠٠٠ × ١٠٪ = ٢٠٠٠ دينار سنوياً

ب) مقدار ربح شركة التأمين = ما تدفعه الشركة – مقدار ما دفعه الشخص

= ٢٠٠٠٠ – (٢٠٠٠ × ١٢)

= ٢٠٠٠٠ – ٢٤٠٠٠ = ٤٠٠٠ دينار

مثال (٤) / أمنت شركة للبقوليات على بضاعة مكونة من الفول بقيمة ٦٠٠٠ دينار والعدس بقيمة ٢٠٠٠ دينار ، بتأمين مقداره ٦٪ ، فإذا تلف أثناء النقل خمس كمية الفول ، وربع كمية العدس ، أحسب مقدار ربح أو خسارة شركة التأمين .

الحل / مقدار ما تدفعه شركة البقوليات = ٨٠٠٠ × ٦٪ = ٤٨٠ دينار

مقدار ما تدفعه شركة التأمين = $\left(\frac{١}{٥} \times ٦٠٠٠\right) + \left(\frac{١}{٤} \times ٢٠٠٠\right)$ = ١٢٠٠ + ٥٠٠ = ١٧٠٠ دينار

مقدار ربح شركة التأمين = مقدار ما تدفعه شركة التأمين – ما دفعته شركة البقوليات

= ٤٨٠ – ١٧٠٠ = – ١٢٢٠ دينار

سؤال (١) / أمن مجدي على سيارته التي ثمنها ٣٠٠٠٠ دينار تأميناً شاملاً ، حيث يدفع قسطاً سنوياً مقداره ٤٠٠ دينار ، على أن تدفع شركة التأمين ٨٠٪ من ثمن السيارة إذا تعرضت للتلف ، فإذا تعرضت السيارة بعد ١٠ سنوات لحادث سير وأصبحت غير صالحة للاستعمال ، أحسب مقدار ربح أو خسارة شركة التأمين.

....

....

....

....

....

تمارين الوحدة

السؤال الأول: أختر رمز الاجابة الصحيحة :

١) عبارة عن صك يثبت أن لحامله حصة في ملكية أصول شركة المساهمة .

أ) السندات ب) السهم ج) التأمين د) الشيك

٢) هي أوراق مالية تصدرها الحكومات أو الشركات بقيمة معينة تثبت أن مالكها دائن للجهة المصدرة للسند .

أ) السندات ب) السهم ج) التأمين د) الشيك

٣) ماذا تسمى قيمة السهم عند الشراء وهي القيمة التي تظهر في الدفاتر المحاسبية وعلى شهادة السهم ؟

أ) القيمة الحالية ب) القيمة الأسمية ج) علاوة الاصدار د) القيمة السوقية

٤) يمتلك محمد ٤٠٠٠ سهم في شركة الأصدقاء للمواد الغذائية قيمة السهم الأسمية دينار واحد ، إذا وزعت الشركة ٨ ٪ أرباحاً على المساهمين في إحدى السنوات ، فما أرباح محمد في تلك السنة ؟

أ) ٣٢٠٠ دينار ب) ٣٢٠ دينار ج) ٣٢٠٠٠ دينار د) ٤٠٠ دينار

٥) اشترى أحمد ٣٠٠ سند بفائدة سنوية ١٢ ٪ ، فكان ربحه في نهاية السنة ٣٦٠ ديناراً ، فإن القيمة الأسمية للسند الواحد :

أ) ٣٠ دينار ب) ٢٠ دينار ج) ١٥ دينار د) ١٠ دينار

٦) أمن رجل حياته حيث يدفع قسطاً شهرياً قدره ١٠٠ دينار ، ما مجموع ما يدفعه في ١٥ سنة ؟

أ) ١٨٠ دينار ب) ١٥٠٠ دينار ج) ١٨٠٠٠ دينار د) ١٨١٠٠ دينار

السؤال الثاني: يملك أحمد ٤٠٠ سهم في مصنع للمنظفات ، قيمة السهم الأسمية ديناران ، وقيمته الحالية دينار ونصف ، فإذا وزع المصنع أرباحاً قيمتها ٦ ٪ ، أحسب ؟

أ) مقدار ربح أحمد .

ب) القيمة الحالية لأسهم أحمد .

ج) النسبة المئوية الفعلية للربح .

....

....

....

....

السؤال الثالث: تبلغ قيمة السم الإسمية في مقصف مدرسة مسقط الثانوية دينارين ، إذا أشترى محمد ١٠ أسهم ووزعت المدرسة في نهاية العام أرباحاً بنسبة ٢٢٠٪ فكم ربح محمد في نهاية العام الدراسي ؟

....

....

السؤال الرابع: أستثمر خليل مبلغ من المال لدى شركة فاشترى ٦٠ سنداً ، القيمة الأسمية للسند الواحد ٥٠ دينار بفائدة قدرها ٨٪ جد :

١) مقدار المبلغ الذي استثمر فيه محمود .

٢) العائد بعد ٥ سنوات .

....

....

....

....

السؤال الخامس: يملك مصنع أدوات كهربائية ألات ثمنها ٦٠٠٠٠ دينار ، أمن بقسط سنوي مقداره ٤٪ ، ولمدة ٣٠ عاماً ، فإذا تلفت المعدات بعد مرور ٢٠ عاماً ، أحسب مقدار ربح أو خسارة شركة التأمين .

....

....

....

السؤال السادس: أمن شخص على حياته لدى شركة تأمين بمبلغ ٢٨٠٠٠ دينار ، بقسط سنوي مقداره ١٢٪ من قيمة التأمين ولمدة ١٥ سنة ، فإذا توفي هذا الشخص بعد ١١ عاماً ، أوجد مقدار ربح أو خسارة شركة التأمين ؟

....

....

....

....