



دولة فلسطين
قَرَارُ الْوَلَاةِ الْيَمِينَةِ وَالْعَلِيَّةِ الْعَالِيَةِ

بطاقات التعلم الذاتي في الرياضيات الصف الحادي عشر "أدبي" الفصل الدراسي الثاني

إعداد

لجنة مبحث الرياضيات

قسم الإشراف التربوي - مديرية التربية والتعليم خانيونس

إشراف عام

الإدارة العامة للإشراف والتأهيل التربوي

غزة ٢٠٢٠م

فريق الإعداد

مشرف تربوي - مديرية التربية - خانيونس
مشرف تربوي - مديرية التربية - خانيونس
معلم - مدرسة الاسراء الثانوية بنين
معلم - مدرسة فاروق الفرا الثانوية بنات
معلم - مدرسة فاروق الفرا الثانوية بنات

أ. سهيل رمضان شبير
د. وسام إبراهيم موسى
أ. محمود محمد حسونة
أ. هالة فضل القديري
أ. ريم إبراهيم الأسطل

إشراف ومتابعة مديرية التربية

أ. محمود المصري
رئيس قسم الاشراف

إشراف ومتابعة

د. إبراهيم رمضان رمضان
مدير دائرة الإشراف التربوي

أ. حاتم عبد الله شحادة
مدير دائرة التدريب التربوي

د. ريما إبراهيم الخطيب
رئيس قسم تدريب المعلمين

إشراف عام

د. محمود أمين مطر
مدير عام الإشراف والتأهيل التربوي

يمثل إغلاق المدارس في جميع أنحاء العالم نتيجة لجائحة COVID-19 خطراً غير مسبوق على تعليم الأطفال وحمايتهم وعافيتهم، ولا يقتصر الأثر السلبي لإغلاق المدارس على تدني مستويات تحصيل الطلبة، بل يتعدى ذلك إلى الأضرار النفسية والسلوكية والصحية والاجتماعية نتيجة غياب دور المدرسة كمؤسسة تربوية. وقد تسبب إغلاق المدارس بتكلفة اجتماعية واقتصادية باهظة؛ وبالعديد من الآثار التربوية السلبية، حيث أشارت اليونسكو في تقريرها الصادر في أبريل ٢٠١٩ أن إغلاق المدارس والمؤسسات التعليمية تسبب بحرمان الأطفال والشباب من فرص النمو والتطور، حيث يحظى الأطفال بفرص تعليمية أقل خارج المدرسة؛ ولا سيما بالنسبة إلى الأهل محدودي التعليم والموارد.

إن اعتماد برامج التعليم عن بُعد بكافة أشكالها يسهم في تخفيف الأضرار التربوية الناجمة عن إغلاق المؤسسات التعليمية؛ غير أن أشكال التعليم عن بُعد التي يتم استخدامها يجب أن تتسجم مع خصائص المرحلة العمرية للمتعلمين وإمكاناتهم، كما ينبغي أن تُساعد المتعلمين بشكل أفضل على اكتساب المفاهيم وإتقان المهارات العلمية والحياتية المختلفة.

ومن هذا المنطلق نبعت فكرة تقديم بطاقات التعلم الذاتي للأطفال في المرحلة الأساسية من الأول حتى التاسع الأساسي؛ والتي ركزت على تقديم المفاهيم والمهارات الأساسية الخاصة بكل صف أو مبحث بأسلوب مبسط يساعد الأطفال على اكتسابها، حيث تضمنت كل بطاقة مجموعة من الإرشادات الخاصة بالطالب وولي أمره؛ بالإضافة إلى تقديم المفهوم/المهارة بطريقة سهلة وبسيطة مدعمة بالأمثلة والتدريبات بما يساعد المتعلم على اكتساب المفهوم وإتقان المهارة ذاتياً.

والله ولي التوفيق،

د. محمود أمين مطر

مدير عام الإشراف والتأهيل التربوي

رقم البطاقة	الموضوع	رقم الصفحة
١	المتتاليات	٧
٢	الحد العام للمتتالية	١٠
٣	المتتالية الحسابية	١٤
٤	الحد العام للمتتالية الحسابية	١٨
٥	الأوساط الحسابية	٢٦
٦	المتتالية الهندسية	٢٧
٧	الحد العام للمتتالية الهندسية	٣١
٨	الأوساط الهندسية	٣٣
٩	نهاية الاقتران	٣٧
١٠	قوانين النهايات	٤٢
١١	إيجاد النهاية من خلال التحليل	٤٩
١٢	نهاية اقتران متعدد القاعدة (متشعب)	٥٤
١٣	الاتصال	٥٩

ما هي بطاقات التعلم الذاتي؟

مجموعة من البطاقات المرافقة للكتاب المدرسي؛ والداعمة لتعلم طلبة الصفوف من الأول حتى التاسع الأساسي في المباحث المختلفة، ويركز محتوى تلك البطاقات على المفاهيم والمهارات الأساسية في كل مبحث، بحيث يتم عرض المفهوم أو المهارة مع بعض الأمثلة المعبنة والتوضيحية؛ وتدريبات للتقويم الذاتي، كما تتضمن البطاقة مجموعة من الإرشادات ذات العلاقة بتعلم المهارة؛ وروابط لمحتوى رقمي مساند (فيديو تعليمي، مقطع صوتي، لعبة تربوية ...).

نصائح وإرشادات

عزيزي ولي الأمر:

التعلم الذاتي مسؤولية شخصية لدى الفرد؛ غير أن الأطفال يحتاجون دعماً وإشرافاً مباشراً من أمهاتهم وآبائهم ليتمكنوا من التعلم الذاتي بشكل فاعل ومنظم، ولتحقيق هذا الدعم بالشكل المطلوب؛ إليك بعض النصائح والإرشادات:

- تذكر أن التعليم لا يقتصر فقط على الذهاب إلى المدرسة، فهناك الكثير من الأشياء يتعلمها الأطفال خارج المدرسة.
- تذكر أن لكل فرد شخصيته وطبيعته الخاصة، وليس بالضرورة أن تتجح الطريقة التي استخدمها صديقك في التعامل مع طفله، للتعامل مع طفلك أنت.
- لا تحاول التقليل من شأن وقيمة التعلم الذاتي أو جدواه أمام ابنك؛ وتحدث معه عن مسؤوليته عن تعلمه في ظل تعطل الدوام المدرسي.
- عزز كل تقدم يحرزه الطفل؛ وارفع من معنوياته بعبارة الثناء والتشجيع أمام الآخرين، مع مراعاة الثناء عليه بحكمة من غير إفراط أو تفريط.
- ابتعد عن مقارنة طفلك بأقرانه حتى لا تؤثر سلباً على نفسيته وإشعاره بالإحباط.
- عوّد الطفل على تحمل المسؤولية والاهتمام بنفسه كحل الواجبات والقدرة على اتخاذ القرار بنفسه.
- اغلق الفيسبوك وأي وسيلة تواصل اجتماعي أخرى؛ حتى يصبح بإمكانك التركيز على ما يتعلمه طفلك.
- خصّص وقتاً ثابتاً لتعلم طفلك كل يوم؛ ولا تكلفه بأي نشاط آخر في وقت التعلم.
- اختر الوقت الذي يناسب طفلك ولا يتعارض مع أي نشاط آخر يرغب الطفل بالقيام به (مشاهدة طفلك حلقة كرتون يحبها على التلفاز، وقت النوم ..) وذلك حتى لا يتشتت ذهن الطفل بالتفكير في هذه الأنشطة.

- ابتعد عن العنف والعصبية والصراخ أثناء متابعتك لدروس طفلك، لأن ذلك يعمل على هدر طاقته؛ وتشويش تفكيره؛ وتشتيت تركيزه.
- أعط الطفل فرصة الحل الفردي للتعرف على إمكانياته وتعزيز نقاط القوة ومعرفة نقاط الضعف.
- فرغ نفسك في أوقات تعلم طفلك؛ وتخلص من التفكير في أي مسؤوليات أخرى.
- تأكد من دافعية طفلك ناحية ما سيتم تعلمه؛ لأنّ هذا ما سوف يساعده في الاستمرارية والتعلم.
- تأكد من حالة طفلك البدنية والنفسية مثلاً: حصوله على قدر جيد من النوم، لا يشعر بالجوع؛ حتى تضمن عدم تفكيره في هذه الأشياء أثناء تتعلم.

آليات التعامل مع بطاقات التعلم الذاتي:

عزيزي ولي الأمر:

- هناك مجموعة من الأمور التي ننصح القيام بها قبل وأثناء وبعد تنفيذ جلسات التعلم الخاصة ببطاقات التعلم، وهذه الأمور تتلخص فيما يلي:
- خصص مكاناً هادئاً جيد التهوية؛ وبعيد عن الضوضاء، وحدد ركناً مناسباً في المكان لوضع الكتب ومواد التعلم بما يضمن عدم مقاطعة باقي أفراد الأسرة لجلسة التعلم.
 - تأكد من وجود القرطاسية المناسبة (قلم، ممحاة، مسطرة، كراسة جانبية، مواد مناسبة للمادة ...)
 - اقرأ الإرشادات والنصائح المدرجة في كل بطاقة؛ وحاول الالتزام بها ما أمكن.
 - أخبر الطفل باسم المادة ورقم البطاقة التي ستناقشها معه، واسأله عن الدرس الذي تنتمي له البطاقة.
 - حدد للطفل المدة الزمنية المتوقعة لإنجاز البطاقة، ويفضل أن تتراوح المدة بين (١٥ - ٢٠) دقيقة.
 - اجعل من التعلم عملية ممتعة خالية من الإجهاد؛ واطلب منه الرسم أو الغناء أثناء التعلم.
 - لا تقم بالمهام بدلاً عن الطفل إذا شعر بالتعب؛ بل امنحه وقتاً للراحة؛ ثم حفزه على الرجوع للبطاقة.
 - احرص على ربط التعلم بأمثلة من الحياة اليومية للطفل.
 - علم الطفل كيف يفكر من خلال طرح الأسئلة عليه ومناقشته في إجاباته.
 - استعن بالكتاب المدرسي لتعميق فهم الطفل لمحتوى المفهوم/المهارة التي تتضمنها البطاقة.
 - ساعد طفلك على حل تدريبات مشابهة لتلك الواردة في بطاقات التعلم الذاتي.
 - تعامل مع أخطاء الطفل بهدوء؛ ولا تترك الخطأ بدون تصحيح.
 - أعط الطفل وقتاً مناسباً للراحة.
 - لا تناقش مع الطفل أكثر من بطاقة في الجلسة الواحدة.
 - أشعر الطفل بأهمية العمل الذي قام به واحتفل معه بإنجازه



إرشادات للتعامل مع رمز QR

تم إضافة رموز تفاعلية بجانب الروابط المحددة، ولمشاهدة الفيديو المرتبط بالرمز عليك بما يلي:

١. تنزيل أي برنامج من المتجر لقراءة رمز QR، وبإمكانك البحث عنه بالصيغة التالية في المتجر (قارئ رمز QR).

٢. عند دخولك للمتجر والبحث عن التطبيق ستجد الكثير من التطبيقات التي تدعم الفكرة، قم بتحميل أي تطبيق من التطبيقات.

٣. الخطوات السابقة ستقوم بعملها مرة واحدة، وهي المرة الأولى فقط لتنزيل التطبيق

٤. بعد تنزيل التطبيق قم بتشغيل التطبيق، وتوجيه الكاميرا الموجودة داخل التطبيق نحو الرمز المحدد، ثم انقر على كلمة فتح الموقع (المتصفح)، لتشاهد الفيديو المرتبط بالرمز.

ملاحظة: بعض الهواتف الذكية الحديثة موجود بها (قارئ QR) بشكل تلقائي.

الأهداف

- ١- يعرف المتتالية.
٢- يميز المتتاليات المنتهية وغير المنتهية.

تلخيص المحتوى:

تسمى الأعداد التي تكتب على صورة: $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ بالمتتالية.

المتتالية اقتران مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (في هذه الحالة تسمى متتالية غير منتهية) أو مجاله مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة على الصورة $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ وفي هذه الحالة تسمى متتالية منتهية، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

تصنف المتتالية من حيث عدد الحدود إلى نوعين متتالية منتهية وغير منتهية.



الأنشطة والتدريبات:

نشاط (١)

ميز المتتاليات المنتهية والمتتاليات وغير المنتهية؟

(١) ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ...

(٢) ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ... ، ٢٠

(٣) ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ ، ...

(٤) ٥ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ ، ٢٥

الحل:

(١) غير منتهية (لأننا لا نستطيع عد حدودها).

(٢) منتهية (لأننا نستطيع عد حدودها)

(٣) (٤)

نشاط (٢)

جد مجال و مدى المتتالية: ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩

الحل:

العدد ٣ هو حدها الأول، ويرمز له بالرمز ح١، و رتبته ١ ، والعدد ٥ هو حدها الثاني ، ويرمز له بالرمز ح٢ و رتبته ٢ ، و العدد ٧ هو حدها الثالث ، ويرمز له بالرمز ح٣ و رتبته ٣ و هكذا مما يعنى ان هذه المتتالية تتكون من ح١ ، ح٢ ، ح٣ ، ح٤؛

بما أن المتتالية هي اقتران، فإن لكل عدد صحيح موجب (ن) صورة واحدة فقط في المدى هي

ح٠ كما في الجدول الآتي:

رتبة الحد	ن	١	٢	٣	٤	المجال
قيمة الحد	ح٠	٣	٥	٧	٩	المدى

نشاط (٣)

في المتتالية: ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ٣٥:

(١) ما قيمة: $ح_٢$ ، $ح_٥$ ، $ح_٦$ ؟
(٢) ما رتبة الحد الذي قيمته ٢٠؟

الحل:

(١) تُقارَن المتتالية: ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ٣٥ بالمتتالية: $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ ، $ح_٥$ ، $ح_٦$ ، $ح_٧$

فيكون $ح_٣ = ١٥$ ، $ح_٥ = ٢٥$ ، $ح_٦ = ٣٠$

(١) تُقارَن المتتالية: ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ٣٥ بالمتتالية: $ح_١$ ، $ح_٢$ ، $ح_٣$ ، $ح_٤$ ، $ح_٥$ ، $ح_٦$ ، $ح_٧$

فيكون $ح_٣ = ١٥$ ، $ح_٥ = ٢٥$ ، $ح_٦ = ٣٠$

(٢) رتبة الحد ٢٠ هي ٤؛ لأن ترتيب الحد ٢٠ هو الرابع في المتتالية.

تدريب

في المتتالية: ١، ٣، ٦، ١٠، ١٥، ٢١، ٢٨، ٠٠٠:

(١) ما قيمة: $ح_٢$ ، $ح_٤$ ؟

(٢) ما رتبة الحد الذي قيمته ٢٨؟

الأهداف

- ١- يكتب حدود متتالية علم حدها العام.
- ٢- إيجاد الحد العام لمتتالية إذا علم بعض حدودها.

تلخيص المحتوى:

المتتالية اقتران مجاله مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة (في هذه الحالة تسمى متتالية غير منتهية) أو مجاله مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة على الصورة $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ وفي هذه الحالة تسمى متتالية منتهية، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

الأنشطة والتدريبات:

نشاط (١)

جد الحد العام للمتتالية: ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ...

الحل:

نعيد كتابة حدود المتتالية على النحو:

$$2 = 1 \times 2$$

$$4 = 2 \times 2$$

$$6 = 3 \times 2$$

$$8 = 4 \times 2$$

$$10 = 5 \times 2$$

لاحظ أن العدد ٢ وإشارة (x) يتكرران في كل حد، وأن

الذي يتغير من حد إلى آخر هو الأعداد: ١، ٢، ٣، ٤، ٥؛

فالحد السادس (ح٦) هو $6 \times 2 = 12$ ، والحد العاشر (ح١٠) هو $10 \times 2 = 20$ ،

والحد العام هو (ح_n) $= n \times 2 = 2n$.

نشاط (٢)

جد الحد العام للمتتالية: ٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ٢٥، ٣٠، ...

الحل

$$٥ = ١ \times ٥ = ح_١ \quad ١٠ = ٢ \times ٥ = ح_٢$$

$$١٥ = ٣ \times ٥ = ح_٣ \quad ٢٠ = ٤ \times ٥ = ح_٤$$

$$٢٥ = ٥ \times ٥ = ح_٥$$

$$ح_٦ = ٦ \times ٥ = ٣٠$$

أي إن قيمة الحد تساوي حاصل ضرب رتبته في العدد ٥

نشاط (٣)

جد الحد العام للمتتالية: ١، ٤، ٩، ١٦، ...

الحل:

$$١ = ١^٢ = ح_١$$

$$٤ = ٢^٢ = ح_٢$$

$$٩ = ٣^٢ = ح_٣$$

$$١٦ = ٤^٢ = ح_٤$$

$$٢٥ = ٥^٢ = ح_٥$$

الحد العام: $ح_٦ = ٦^٢ = ٣٦$

انتبه

إن قاعدة الحد العام للمتتالية تربط كل حد من حدود المتتالية برتبة ذلك الحد.

نشاط (٤)

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية التي حدها العام: $ح_n = ١ + ٣^n$

الحل:

نعوض عن $ن$ بالقيم: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ في الحد العام

$$ح_١ = ١ + ١ = ١ + ٣^١ = ٢$$

$$ح_٢ = ١ + ٨ = ١ + ٣^٢ = ٩$$

$$ح_٣ = ١ + \dots = ١ + ٣^٣ = \dots$$

$$ح_٤ = \dots$$

$$ح_٥ = \dots$$

نشاط (٥)

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية التي حدها العام: $ح_n = \frac{ن}{١+ن}$

الحل:

نعوض بالقيم: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ بدل $ن$ في الحد العام

$$ح_١ = \frac{١}{١+١} = \frac{١}{٢}$$

$$ح_٢ = \frac{٢}{١+٢} = \frac{٢}{٣}$$

$$ح_٣ = \dots$$

$$ح_٤ = \dots$$

$$ح_٥ = \dots$$

تدريبات

(١) أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتاليات التي حدها العام:

$$(أ) \quad ح_n = n^2$$

$$(ب) \quad ح_n = 7 + 2n$$

$$(ج) \quad ح_n = 2^n - 1$$

(٢) اكتب الحد العام لكل متتالية من المتتاليات الآتية:

$$(أ) \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \quad (ب) \quad \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}$$

(٣) أكمل المتتاليات التالية بإضافة ثلاثة حدود لكل منها:

$$(أ) \quad 1, 5, 9, \dots$$

$$(ب) \quad 1 - 1, 1 - 1, \dots$$

$$(ج) \quad 1, 1 + d, 1 + d^2, \dots$$

(٤) أي المتتاليات الآتية تعتبر غير منتهية:

$$(أ) \quad 16, 25, 34, \dots, 142 \quad (ب) \quad 6, 6, 6, 6, 6$$

$$(ج) \quad ح_n = 2n^3 + 3, \quad n \in \mathbb{N} \quad (د) \quad ح_n = 3n - 1, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

١- يعرف المتتالية الحسابية.

٢- يميز المتتالية الحسابية من غيرها.

أي المتالتين الآتية حسابية:

32, 17, 8, 4, 2 (2)

أكتب الحدود الثلاثة التالية في المتتالية الحسابية: ١ ، ٤ ، ٧ ، ...

المتتالية هي: ١، ٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٧

أكتب المتتالية الحسابية التي حدها الأول = ٣ ، و أساسها = ٥

المتتالية هي: ٣، ٨، ١٣، ١٨، ...

٤) متتالية حسابية حدها الأول = ٤ ، و أساسها = ٦ فإن حدها العاشر يساوي:

- أ) ١٠ ب) ٢٢ ج) ٥٨ د) ٦٠

٥) أساس المتتالية الحسابية: ١ ، ٦ ، ١١ ، ٠٠٠٠ هو:

- أ) ٤ ب) ٥ ج) ٦ د) ٧

٦) إذا كونت الأعداد ٢١ ، ٢ ، ٣٥ متتالية حسابية فإن قيمة ك هي:

- أ) ٧ ب) ٧ - ج) ١٤ د) ٢٨

٧) عدد حدود المتتالية الحسابية: ٤ ، ١٠ ، ١٦ ، ٠٠٠٠٠٠ ، ٦٤ هو:

- أ) ٨ ب) ٩ ج) ١٠ د) ١١

الأهداف

١- يجد الحد العام لمتتالية حسابية معطاة.

٢- يجد عدد حدود متتالية حسابية منتهية.

تلخيص المحتوى:

الحد العام للمتتالية الحسابية $ح_n = أ + (ن - ١) \times د$
 حيث أ الحد الأول، د: أساس المتتالية الحسابية، ن: رتبة الحد

$$\begin{array}{c}
 \text{الحد العام} \longrightarrow ح_n = أ + (ن - ١) \times د \longleftarrow \text{أساس المتتالية الحسابية} \\
 \begin{array}{cc}
 \swarrow & \searrow \\
 \text{رتبة الحد} & \text{الحد الأول}
 \end{array}
 \end{array}$$

الأنشطة والتدريبات:

نشاط (١)

اوجد الحد السادس في المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٢ وأساسها ٥؟

الحل:

$$أ = ٢ ، د = ٥ ، ن = ٦$$

$$ح_n = أ + (ن - ١) \times د$$

$$ح_٦ = ٢ + (٦ - ١) \times ٥$$

$$ح_٦ = ٢ + ٥ \times ٥ = ٢٧$$

تدريب

اوجد الحد العاشر في المتتالية الحسابية ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ،

نشاط (٢)

في المتتالية الحسابية: ١٣ ، ١٦ ، ١٩ ، ، ١٠٠

(١) اوجد الحد العاشر منها؟ (٢) اوجد عدد حدود هذه المتتالية؟

الحل:

$$(١) \text{ بما المتتالية حسابية } \Leftarrow \text{ أ } = ١٣ \quad \text{ د } = ١٦ - ١٣ = ٣ \quad \text{ ن } = ١٠$$

$$\text{ح ن} = \text{أ} + (\text{ن} - ١) \times \text{د}$$

$$\text{ح.} ١٠ = ١٣ + (\text{ن} - ١) \times ٣$$

$$٤٠ = ٢٧ + ١٣ = ٣ \times ٩ + ١٣ =$$

(٢) المطلوب هو إيجاد قيمة ن عندما $\text{ح ن} = ١٠٠$

$$\text{ح ن} = \text{أ} + (\text{ن} - ١) \times \text{د}$$

$$١٠٠ = ١٣ + (\text{ن} - ١) \times ٣$$

$$١٠٠ = ١٣ + ٣\text{ن} - ٣$$

$$١٠٠ = ١٠ + ٣\text{ن}$$

$$٩٠ = ٣\text{ن}$$

$$\text{ن} = ٩٠ \div ٣ = ٣٠ \Leftarrow$$

نشاط (٣)

جد عدد حدود المتتالية: ٧ ، ٩ ، ١١ ، ، ٦٥ ثم جد حدها العشرين؟

الحل: (لاحظ أنه لم يذكر نوع المتتالية لذا نقوم بالتأكد من نوعها أولاً)

$$(١) \quad ٢ = ٩ - ١١ \quad \text{اذن المتتالية حسابية}$$

$$٧ = أ \quad ٢ = د \quad ح ن = ٦٥ \quad \text{المطلوب إيجاد قيمة ن}$$

$$ح ن = أ + (١ - ن) \times د$$

$$٦٥ = ٧ + (١ - ن) \times ٢$$

$$٦٥ = ٧ + \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots =$$

$$ن = \dots\dots\dots$$

$$(٢) \quad ح ن = أ + (١ - ن) \times د$$

$$ح ٢٠ = ٧ + (١ - \dots\dots\dots) \times ٢$$

$$ح ٢٠ = \dots\dots\dots$$

أكتب المتتالية الحسابية التي حدها السابع يساوي ١٨، وحدها الخامس عشر يساوي ٣٤؟

من المعطيات: ح_٧ = ١٨

نشاط (٥)

متتابة حسابية مجموع حديها الأول والثاني = ٩، وحدها الخامس = ٢٢ أكتب هذه المتتابة؟

الحل:

المعطيات: $ح_١ + ح_٢ = ٩$ ، $ح_٥ = ٢٢$

$$ح_٥ = أ + د \times (٥ - ١) \iff ح_٢ = أ + د \times (٢ - ١) \iff ح_١ + ح_٢ = ٩$$

$$٩ = ح_١ + ح_٢ \iff ٩ = أ + د + أ + د \iff ٩ = ٢أ + ٢د \iff ٩ = ٢(أ + د)$$

$$\iff ٩ = ٢(أ + د) \iff ٩ = ٢ \times ٤.٥ \iff ٩ = ٩$$

$$\text{بالمثل: } ح_٥ = أ + د \times (٥ - ١) \iff ح_٥ = أ + ٤د \iff ٢٢ = أ + ٤د$$

بحل المعادلتين (١)، (٢) ينتج أن:

$$أ = \dots\dots\dots$$

$$د = \dots\dots\dots$$

المتتالية هي: $\dots\dots\dots$

تدريب

متتالية حسابية فيها $ح_٤ = ١٨$ ، $ح_٧ = ٢٧$ أكتب هذه المتتالية؟

نشاط (٦)

في المتتالية الحسابية: ١، ٧، ١٣، ١٩، ٢٥، ٣١، ٣٧، ٤٣، ٤٩، ٥٥، أوجد:

(١) الحد العاشر (٢) هل العدد ١٢٣ هو أحد حدود المتتالية؟

الحل:

$$١ = أ \quad ٦ = ١ - ٧ = د$$

$$(١) ح ن = أ + (١ - ن) \times د$$

$$١٠. ح = أ + ٩ \times د$$

$$٥٥ = ٥٤ + ١ = ٦ \times ٩ + ١ =$$

(٢) نفرض أن الحد الذي قيمته ١٢٣ هو ح ن

$$ح ن = ١٢٣ = أ + (١ - ن) \times د$$

$$\Leftarrow ١٢٣ = أ + (١ - ن) \times ٦$$

$$\Leftarrow ١٢٣ = أ + ٦ - ٦ن$$

$$\Leftarrow ١٢٣ = ٥ - ٦ن$$

$$\Leftarrow ١٢٣ + ٦ن = ٥$$

$$\Leftarrow ١٢٨ = ٦ن$$

$$\Leftarrow \frac{١٢٨}{٦} = \frac{٦٤}{٣} = ن$$

وبما أن ن ليست عدد صحيح موجب

لا يوجد حد من حدود المتتالية قيمته ١٢٣

نشاط (٧)

إذا كانت: ٤ ، س ، ص ، - ٥ حدود متتالية حسابية جد قيمة كل من س ، ص ؟

الحل:

$$أ = ٤ \quad ح = - ٥$$

$$ح - أ = (١ - ن) \times د$$

$$ح - أ = (١ - ٤) \times د$$

$$- ٥ - ٤ = ٣ د \quad \Leftarrow \quad - ٥ - ٤ = ٣ د \quad \Leftarrow \quad - ٥ - ٤ = ٣ د$$

$$\Leftarrow \quad د = \frac{٩ - ٣}{٣} = ٣$$

المتتالية هي: ٣ ، ١ ، - ٢ ، - ٥ \Leftarrow س = ١ ، ص = - ٢

نشاط (٨)

إذا كونت الاعداد ٥ ، ك ، ٠٠٠٠ ، ٣ ، ٢٣ متتالية حسابية فأوجد قيمة ك ؟

الحل:

$$د = ك - ٥ ، د = ٢٣ - ٣$$

$$\Leftarrow \quad ك - ٥ = ٢٣ - ٣$$

$$\Leftarrow \quad ك + ٢٣ = ٥ + ٣$$

$$\Leftarrow \quad ٢٨ = ك$$

$$\Leftarrow \quad ك = ٧$$

تدريبات

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

(١) الحد الخامس في المتتالية التي حدها العام $ح_n = ٣ - (٢ - ٢)^n$ هو:

- (أ) ٣٢ (ب) ٣٢ - (ج) ٩٦ (د) ٩٦ -

(٢) رتبة الحد ١٥ في المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٣٠، وأساسها ٣ - هو:

- (أ) الخامس عشر (ب) الثلاثون (ج) الخامس (د) السادس

(٣) إذا كانت: $٣ - س$ ، ١١ ، ٠٠٠ متتالية حسابية فإن $س =$

- (أ) ٧ (ب) ٤ (ج) ٨ (د) ١٤

(٤) الحد العام للمتتالية: $٤، ٧، ١٠، ١٣، ٠٠٠٠$ هو:

- (أ) $٤ ن$ (ب) $٣ ن + ١$ (ج) $١ ن + ١$ (د) $٥ ن - ١$

(٥) إذا كان: $٢ أ + ١، ٥ أ - ١، ٦ أ + ٣$ ثلاث حدود متتالية من متتالية حسابية فإن $أ =$

- (أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٤

السؤال الثاني:

(١) جد الحد العاشر في المتتالية الحسابية التي أساسها $٣ =$ ، وحدها الخامس عشر $= ٤٥$ ؟(٢) جد المتتالية الحسابية التي مجموع حديها الثاني والسادس $= ٢٠$ ، و حدها السابع $= ٧$ ؟(٣) متتالية حسابية تتكون من ٨ حدود حدها الأول $= ٢٥$ ، وحدها الثاني $= ٢٣$ جد حدها الأخير ؟

الأهداف

- ١- يعرف الوسط الحسابي.
- ٢- يدخل عدد من الأوساط الحسابية بين عددين.

تلخيص المحتوى:

تسمّى الأعداد s_1, s_2, \dots, s_n أوساطاً حسابية بين العددين a, b :
إذا كانت $a, s_1, s_2, \dots, s_n, b$ متتالية حسابية.

الوسط الحسابي لعددين مثل ٨ ، ٢٠ هو $\frac{٨+٢٠}{٢} = ١٤$

أي ان الأعداد ٨ ، ١٤ ، ٢٠ تشكل متتالية حسابية

ملاحظة: عدد حدود المتتالية = عدد الأوساط + ٢

الأنشطة والتدريبات:

نشاط (١)

أدخل ٥ أوساط حسابية بين العددين ١٢ ، ٥٤ ؟

الحل:

عند ادخال ٥ أوساط حسابية بين العددين ١٢ ، ٥٤

تصبح المتتالية على النحو: ١٢ ، $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, ٥٤$

$$١٢ = a, \quad ٥٤ = h$$

$$h = a + (n-1)d \quad \Leftarrow \quad h = ١٢ + (٥-1)d$$

$$٥٤ = ١٢ + ٤d \quad \Leftarrow$$

$$٤٢ = ٤d \quad \Leftarrow \quad d = ١٠.٥$$

المتتالية هي: ١٢ ، ١٩ ، ٢٦ ، ٣٣ ، ٤٠ ، ٤٧ ، ٥٤

نشاط (٢)

ادخل ٤ أوساط حسابية بين العددين ٤ ، ٢٩

الحل:

عند ادخال ٤ أوساط حسابية بين العددين ٤ ، ٢٩

تصبح المتتالية على النحو: ٤ ، ١س ، ٢س ، ٣س ، ٤س ، ٥س ، ٢٩

$$٤ = أ \quad ح٦ = \dots\dots\dots$$

$$ح٦ = أ + (١ - ن) \times د \quad \leftarrow ح٦ = ٤ + \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \leftarrow$$

$$\dots\dots\dots \leftarrow$$

$$\dots\dots\dots \leftarrow د = \dots\dots\dots$$

المتتالية هي:

تدريبات

ادخل ٤ أوساط حسابية بين العددين ١ - ، ٩

اختر الإجابة الصحيحة:

(١) إذا كان عدد الأوساط الحسابية في متتالية حسابية هو ٨ فإن عدد حدود المتتالية الحسابية هو:

(أ) ٨ (ب) ١٠ (ج) ٦ (د) غير ذلك

(٢) إذا أدخلت ٤ أوساط حسابية بين العددين ١٥ ، ٥ فإن الوسط الحسابي الرابع هو:

(أ) ٥ (ب) ٧ (ج) ١١ (د) ١٣

الأهداف

- ١- يعرف المتتالية الهندسية.
- ٢- يميز المتتالية الهندسية من غيرها.

تلخيص المحتوى:

المتتالية الهندسية: هي المتتالية التي تكون فيها النسبة بين أي حد والحد الذي يسبقه مباشرة قيمة ثابتة وتسمى القيمة الثابتة أساس المتتالية ويرمز لها بالرمز (ر) كما يرمز للحد الأول بالرمز (أ) وتكتب على الصورة: أ، أر، أر^٢، أر^٣، ...

لتعيين متتالية هندسية يكفي معرفة حدها الأول وأساسها.

الأنشطة والتدريبات:

نشاط (١)

أي المتتاليات الآتية هندسية، مُبينًا السبب:

$$(١) \quad ٥، ٥-، ٥-، ٥-، ٥-، \dots$$

$$(٢) \quad ٥٤، ١٨، ٦، ٢، \frac{٢}{٣}، \dots$$

$$(٣) \quad ٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، \dots$$

الحل

$$(١) \quad \dots, ٥, ٥, ٥, \dots$$

$$١ - = \frac{٥}{٥} = \frac{٥}{٥}$$

∴ هذه المتتالية هندسية، وأساسها $١ - =$

$$(٢) \quad \dots, ٢, ٦, ١٨, ٥٤, \dots$$

$$\frac{١}{٣} = \frac{٢}{٦} = \frac{٦}{١٨} = \frac{١٨}{٥٤}$$

∴ هذه المتتالية هندسية، وأساسها $\frac{١}{٣} =$

$$(٣) \quad \dots, ٢, ٤, ٦, ٨, ١٠, \dots$$

$$١,٥ = \frac{٦}{٤}, \quad ٢ = \frac{٤}{٢}$$

بما أن $\frac{٦}{٤} \neq \frac{٤}{٢}$ (أي إن النسبة بين أيّ حدين متتاليين ليست قيمة ثابتة)، فإن المتتالية: ٢، ٤،

٦، ٨، ١٠، ... ليست متتالية هندسية.

نشاط (٢)

ميز المتتاليات الهندسية من غيرها فيما يلي:

$$(١) \quad \dots, ١, ١, ١, ١, ١, ١, \dots$$

$$(٢) \quad \text{المتتالية التي حدها العام } ح_n = ٢ + ٥$$

$$(٣) \quad \text{المتتالية التي حدها العام } ح_n = \left(\frac{١}{٢}\right)^n$$

نشاط (٣)

اكتب الحدود الخمسة الأولى في المتتالية الهندسية التي حدها الأول يساوي ٢ ، وأساسها يساوي ٣.

الحل

$$\text{الحد الأول } ح_1 = أ = ٢ ، ر = ٣ .$$

$$\text{الحد الثاني } ح_2 = أ \times ر = ٢ \times ٣ = ٦ .$$

$$\text{الحد الثالث } ح_3 = ح_2 \times ر = ٦ \times ٣ = ١٨ ، \text{ أو } ح_3 = أ \times ر^2 = ٢ \times ٣^2 = ١٨ .$$

$$\text{الحد الرابع } ح_4 = ح_3 \times ر = ١٨ \times ٣ = ٥٤ ، \text{ أو } ح_4 = أ \times ر^3 = ٢ \times ٣^3 = ٥٤ .$$

$$\text{الحد الخامس } ح_5 = ح_4 \times ر = ٥٤ \times ٣ = ١٦٢ ، \text{ أو } ح_5 = أ \times ر^4 = ٢ \times ٣^4 = ١٦٢ .$$

نشاط (٤)

متتالية هندسية حدها الأول ٣ وأساسها ٢ اكتب حدودها الخمسة الأولى؟

الحل:

$$ح_1 = أ = ٣ ، ر = ٢$$

$$ح_2 = أ \times ر = \dots\dots\dots$$

$$ح_3 = أ \times ر^2 = \dots\dots\dots$$

$$ح_4 = أ \times ر^3 = \dots\dots\dots$$

$$ح_5 = أ \times ر^4 = \dots\dots\dots$$

الأهداف

١- يعرف الحد العام للمتتالية الهندسية.

٢- يكتب الحد العام لمتتالية هندسية.

تلخيص المحتوى:

الحد العام للمتتالية الهندسية $ح_n = أ \times ر^{n-1}$
 حيث أ الحد الأول، ر : أساس المتتالية الحسابية، ن : رتبة الحد

الأنشطة والتدريبات:

نشاط (١)

جد الحد السابع من متتالية هندسية حدها الأول $\frac{1}{4}$ و أساسها ٢.

الحل

$$ح_n = أ \times ر^{n-1}$$

$$\text{إذن } ح_7 = \frac{1}{4} \times (2)^{7-1} = \frac{1}{4} \times 64 = 16.$$

تدريب

جد الحد الخامس من متتالية هندسية حدها الأول ٢ ، و أساسها ٣ ؟

نشاط (٢)

أكتب الحد النوني (الحد العام) في المتتاليات الهندسية الآتية:

١ ... ، ٢ ، ٦⁻ ، ١٨ ، ... ٢ ... ، ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ...

١ في المتتالية ٢ ، ٦⁻ ، ١٨ ، ...

$$أ = ٢ ، ر = ٣^{-}$$

$$ح_n = ٢ \times (٣^{-})^{n-١}$$

٢ في المتتالية ٤٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، ...

$$أ = ٤٠ ، ر = \frac{١}{٢}$$

$$ح_n = ٤٠ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{n-١}$$

تدريب

اكتب الحد العام للمتتالية الهندسية: ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٥٤ ،

نشاط (٣)

متتالية هندسية حدها الرابع يساوي ٤٠، وحدها السابع يساوي ٣٢٠ أكتب هذه المتتالية؟

الحل:

$$\text{المعطيات: ح}^4 = 40, \text{ ح}^7 = 320$$

$$\text{ح}^n = \text{أ} \times \text{ر}^{n-1}$$

$$\text{ح}^4 = 40 \Leftarrow \text{أ} \times \text{ر}^{4-1} = 40 \quad (١)$$

$$\text{بالمثل: ح}^7 = 320 \Leftarrow \text{أ} \times \text{ر}^{7-1} = 320 \quad (٢)$$

بقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١)

$$\frac{\text{ر}^6}{\text{ر}^3} = \frac{320}{40} \Leftarrow \text{ر}^3 = 8 \Leftarrow \text{ر} = 2$$

بالتعويض في المعادلة (١) عن ر = ٢

$$\text{أ} \times \text{ر}^3 = 40 \Leftarrow$$

$$\text{أ} \times 8 = 40 \Leftarrow$$

$$\text{أ} = 5 \Leftarrow$$

المتتالية: هي: ٥، ١٠، ٢٠، ٤٠، ...

تدريب

متتالية هندسية حدها الثالث هو ١٢ و حدها السادس هو ٩٦ أكتب حدودها الأربعة الأولى؟

تدريبات

اختر الإجابة الصحيحة:

- (١) الحد السابع في المتتالية الهندسية التي حدها الأول = ١ ، و أساسها = ٣ هو:
- (أ) ٢١ (ب) ٨١ (ج) ٢٤٣ (د) ٧٢٩
- (٢) الحد السادس في المتتالية الهندسية: ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٠٠٠٠٠ هو:
- (أ) ٢٨٦ (ب) ٢٤٣ (ج) ٦٤ (د) ٧٢٩
- (٣) أساس المتتالية الهندسية: ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٠٠٠٠٠ هو :
- (أ) ٢ - (ب) ٢ (ج) ٦ (د) $\frac{1}{2}$
- (٤) الحد العم للمتتالية الهندسية: ٣ ، ٩ ، ٢٧ ، ٨١ ، ٠٠٠٠ هو :
- (أ) ٣ ن (ب) ٢ ن (ج) ٣ ن (د) ٣ ن
- (٥) أساس المتتالية الهندسية التي حدها الثالث = ١٢ ، وحدها الخامس = ٤٨ هو :
- (أ) ١٢ - (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ١٢
- (٦) الحد الذي قيمته ٤٨٦ في المتتالية الهندسية: ٢ ، ٦ ، ١٨ ، ٠٠٠٠٠ هو:
- (أ) الرابع (ب) الخامس (ج) السادس (د) السابع

الأهداف

- ١- يعرف الوسط الهندسي.
٢- يدخل عدة أوساط هندسية بين عددين.

تلخيص المحتوى:

إذا كان a, b عددين ثابتين معلومين فإن: $a, s_1, s_2, \dots, s_n, b$ تسمى أوساطاً هندسية عددها n تقع بين a, b إذا كان:
 $a, s_1, s_2, \dots, s_n, b$ متتالية هندسية.

ملاحظة: عدد حدود المتتالية = عدد الأوساط + ٢

الأنشطة والتدريبات:

نشاط (١)

أدخل ٣ أوساط هندسية بين العددين ١٠ ، ١٦٠

الحل:

عند ادخال ٣ أوساط هندسية بين العددين ١٠ ، ١٦٠ تكون المتتالية هي:

$$10, s_1, s_2, s_3, 160$$

$$10 = a \quad 160 = b$$

$$b = a \cdot r^n \Rightarrow 160 = 10 \cdot r^4 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

$$r = 2 \Rightarrow s_1 = 20, s_2 = 40, s_3 = 80$$

و هذا يعنى وجود متتاليتين:

الأولى عندما $r = 2$ وهى: ١٠ ، ٢٠ ، ٤٠ ، ٨٠ ، ١٦٠

الثانية عندما $r = -2$ وهى: ١٠ ، -٢٠ ، ٤٠ ، -٨٠ ، ١٦٠

نشاط (٢)

ادخل وسطين هندسيين بين $\frac{1}{4}$ ، ٣٢

الحل:

المتتالية الهندسية هي: $\frac{1}{4}$ ، s_1 ، s_2 ، ٣٢

$$..... = أ \quad = ح$$

$$ح_n = أ \times ر^{n-1} \Leftarrow ح_3 = \frac{1}{4} \times ر^2$$

$$\Leftarrow 32 = \frac{1}{4} \times ر^2 \quad \text{بضرب طرفي المعادلة في العدد ٢}$$

$$\Leftarrow$$

$$\Leftarrow$$

$$ر =$$

المتتالية هي:

تدريب

ادخل وسطين هندسيين بين ٢ - ، ٨ -

اختر الإجابة الصحيحة:

(١) الوسط الهندسي الموجب للعددين: ٤ ، ١٦ هو:

- (أ) ٨ (ب) ١٠ (ج) ٢٠ (د) ٦٤

الأهداف

- ١- يفسر مفهوم النهاية.
- ٢- يستخدم الرموز في التعبير عن نهاية اقتران عند نقطة.
- ٣- يميز نهاية اقتران عند نقطة، وقيمتها عند تلك النقطة.
- ٤- يحسب نهاية اقتران (كثير حدود، متعدد القواعد) بيانياً.

تلخيص المحتوى:

يوجد للاقتران q نهاية عند (أ) تساوي العدد الحقيقي (ل) إذا وفقط إذا وجدت النهايتان اليمنى واليسرى عند (أ) وكانت كل منهما تساوي (ل). أي أن:

$$\lim_{s \rightarrow a^+} q(s) = \lim_{s \rightarrow a^-} q(s) = l \text{ إذا وفقط إذا كانت } \lim_{s \rightarrow a^+} q(s) = \lim_{s \rightarrow a^-} q(s) = l.$$

الأنشطة والتدريبات:

نشاط (١)

ليكن $q(s) = s + 1$ ، $s \in \mathbb{R}$ ماذا يحدث لقيم الاقتران عندما تقترب s من العدد ٢؟

الحل:

إذا أردت دراسة سلوك الاقتران $q(s) = s + 1$ عندما تقترب s من العدد ٢ ، فأنشئ جدولاً تحدد فيه قيما للمتغير s حول العدد ٢ ، بحيث يكون بعضها أكبر من ٢ ، وبعضها الآخر أقل من ٢ ثم احسب قيم s المناظرة لها كما الجدول التالي:

← ٢					→				
١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	١,٩٩٩٩		٢,٠٠٠١	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١	س
٢,٩	٢,٩٩	٢,٩٩٩	٢,٩٩٩٩		٣,٠٠٠١	٣,٠٠١	٣,٠١	٣,١	ق(س)
← ٣					→				

لاحظ من الجدول عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليمين (أكبر من ٢)، فإن ق(س) تقترب من العدد ٣ ، وأنه لما تقترب س من العدد ١ من جهة اليسار (أقل من ٢) ، فإن ق(س) تقترب من العدد ٣

عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليمين (س < ٢) فإن ق(س) تقترب من العدد ٣ وبالرموز:

$$\text{نهاق (س)} = 3$$

س ← ٢ +

عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليسار (س > ٢) فإن ق(س) تقترب من العدد ٣ وبالرموز:

$$\text{نهاق (س)} = 3$$

س ← ٢ -

$$\text{نهاق (س)} = \text{نهاق (س)} = 3$$

س ← ٢ + س ← ٢ -

لاحظ أن:

$$\text{نهاق (س)} = 3$$

س ← ٢

إذن:

نشاط (٢)

ليكن ق(س) = ٣ + س ، س ∃ ح ماذا يحدث لقيم الاقتران عندما تقترب س من العدد ٣؟

الحل:

أكمل الجدول التالي:

٢,٩	٢,٩٩	٢,٩٩٩	٢,٩٩٩٩		٣,٠٠٠١	٣,٠٠١	٣,٠١	٣,١	س
٨,٨								٩,٢	ق(س)

$$\text{نهاق (س)} =$$

س ← ٣ +

$$\text{نهاق (س)} =$$

س ← ٣ -

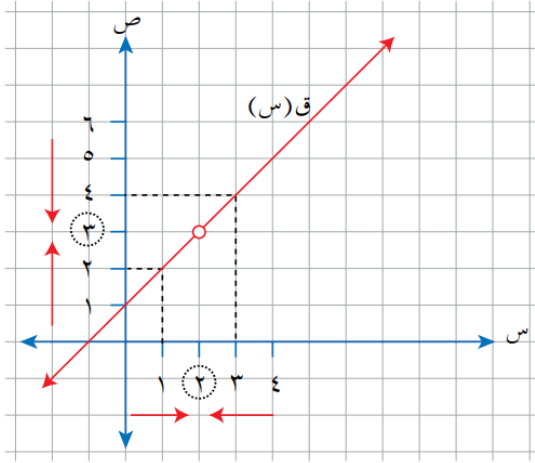
$$\text{نهاق (س)} =$$

س ← ٣

نشاط (٣)

اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س)

جد قيمة كل مما يأتي (ان وجدت)



(١) ق (٢)

(٢) نها ق(س)
س ← ٢ +

(٣) نها ق(س)
س ← ٢ -

(٤) نها ق(س)
س ← ٢

الحل:

(١) مجال الاقتران هو ح - {٢}، لذا ق(س) غير معرف عند س = ٢
وقد اشير الى ذلك بدائرة مفرغة على منحنى الاقتران ق(س) عند س = ٢

(٢) نها ق(س) = ٣
س ← ٢ +

(٣) نها ق(س) = ٣
س ← ٢ -

(٤) لاحظ في هذا المثال أن نها ق(س) = نها ق(س) = ٣
س ← ٢ + س ← ٢ -

أي ان نها ق(س) = ٣
س ← ٢

انتبه

س ← أ
تتضمن أن س ≠ أ

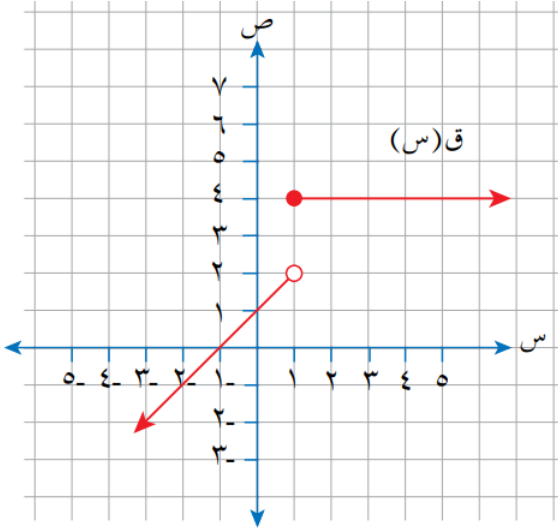
تذكر أن

نها ق(س) = نها ق(س) = ل إذا فقط إذا كانت نها ق(س) = ل
س ← أ + س ← أ -

أما إذا كانت نها ق(س) ≠ نها ق(س) فإن نها ق(س) غير موجودة.
س ← أ + س ← أ -

نشاط (٤)

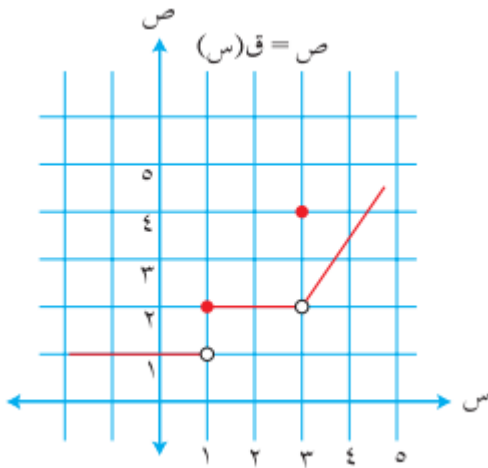
اعتمادا على الشكل المجاور الذي مثل منحنى ق(س) جد قيمة كل مما يلي (ان وجدت)؟



- (١) ق(١) =
- (٢) نهاق(س) = $\text{س} \leftarrow +١$
- (٣) نهاق(س) = $\text{س} \leftarrow -١$
- (٤) نهاق(س) = $\text{س} \leftarrow ١$
- (٥) ق(٣) =
- (٦) نهاق(س) = $\text{س} \leftarrow ٣$

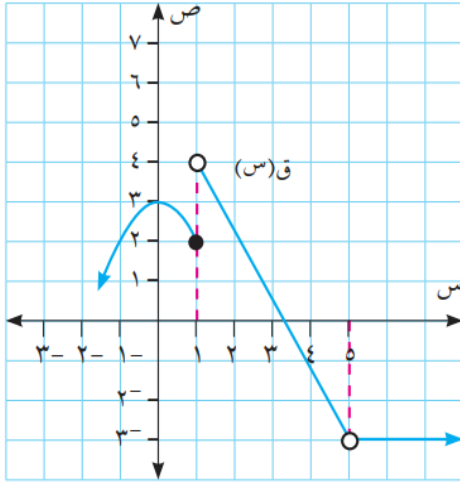
تدريبات

(١) تأمل الشكل المجاور ثم جد ما يلي؟



- (٢) نهاق(س) = $\text{س} \leftarrow +١$
- (٣) نهاق(س) = $\text{س} \leftarrow -١$
- (٤) نهاق(س) = $\text{س} \leftarrow ١$
- (٥) ق(١) =
- (٦) نهاق(س) = $\text{س} \leftarrow +٣$
- (٧) نهاق(س) = $\text{س} \leftarrow -٣$
- (٨) ق(٣) =

(٢) أتملّ الشكل المجاور المرسوم ثم أجد ما يأتي:



• ق(٠) = ٣

• نها ق(س) = _____
س ← ٠

• ق(١) = _____

• نها ق(س) غير موجودة، لماذا؟
س ← ١

• ق(٥) = _____

• نها ق(س) = _____
س ← ٥

(٣) باستخدام طريقة الجدول جد النهاية التالية:

أ) نها (٢ س - ١)
س ← ١

(٤) بالاعتماد على الجدول الآتي يبين قيم ق(س) عندما س ← ٣ فإن نها ق(س) =
س ← -٣

٢,٩٠	٢,٩٨	٢,٩٩	٣	٣,٠٠١	٣,٠١	٣,١	س
٥,٩٠	٥,٩٨	٥,٩٩		٤,٠٠١	٤,٠١	٤,١	ق(س)

د) غير موجودة

ج) ٤

ب) ٦

أ) ٥

الأهداف

يحسب نهاية اقتران كثير حدود جبرياً.

تلخيص المحتوى:

قانون (١): إذا كان $أ$ ، $ج \exists ح$ ، وكان $ق(س) = ج$ ، لكل $س \exists ح$

فإن: $\lim_{س \leftarrow أ} ق(س) = ج$

قانون (٢): إذا كان $أ \exists ح$ ، وكان $ق(س) = س^n$

فإن: $\lim_{س \leftarrow أ} ق(س) = ق(أ) = أ^n$

وبشكل عام إذا كان $ق(س)$ اقتران كثير حدود فإن: $\lim_{س \leftarrow أ} ق(س) = ق(أ)$

قانون (٢) يعنى أن نهاية كثير الحدود عند نقطة تساوي قيمته عند تلك النقطة وتحسب بالتعويض المباشر

إذا كانت $\lim_{س \leftarrow أ} ق(س) = ل$ ، $\lim_{س \leftarrow أ} هـ(س) = ك$ ، وكان $ج$ عدداً حقيقياً فإن:

قانون (٣): $\lim_{س \leftarrow أ} ق(س) \times ج = ل \times ك$

قانون (٤): $\lim_{س \leftarrow أ} ق(س) \pm هـ(س) = \lim_{س \leftarrow أ} ق(س) \pm \lim_{س \leftarrow أ} هـ(س) = ل \pm ك$

قانون (٣) يمكن التعبير عنه بالكلمات كما يلي:

نهاية حاصل ضرب اقتران بعدد ثابت تساوي حاصل ضرب العدد الثابت بنهاية الاقتران.

قانون (٤) يمكن التعبير عنه بالكلمات كما يلي:

نهاية مجموع اقترانين تساوي مجموع نهايتيهما، ونهاية الفرق بين اقترانين تساوي الفرق بين نهايتيهما.

أتعلم: إذا كانت $\lim_{س \leftarrow أ} ق(س) = ل$ ، $\lim_{س \leftarrow أ} هـ(س) = ك$ ، فإن:

قانون (٥): $\lim_{س \leftarrow أ} ق(س) \times هـ(س) = \lim_{س \leftarrow أ} ق(س) \times \lim_{س \leftarrow أ} هـ(س) = ل \times ك$

قانون (٦): $\lim_{س \leftarrow أ} \frac{ق(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim_{س \leftarrow أ} ق(س)}{\lim_{س \leftarrow أ} هـ(س)} = \frac{ل}{ك}$ ، $هـ(س) \neq ٠$ ، $ك \neq ٠$

نشاط (١)

إذا كان $ق(س) = س^٣ + س^٢ + ٥$ ، فجد كلا مما يلي:

(أ) نها $ق(س)$ $س \rightarrow ٢$ (ب) $ق(٢)$

الحل:

(أ) نها $ق(س) = نها (س^٣ + س^٢ + ٥)$ $س \rightarrow ٢$

(تطبيق قانون (٤))

$= نها س^٣ + نها س^٢ + نها ٥$ $س \rightarrow ٢$ $س \rightarrow ٢$ $س \rightarrow ٢$

$= ٥ + ٢^٢ + ٢^٣$

$= ٥ + ٤ + ٨$

$= ١٧$

(ب) $ق(٢) = ٥ + ٢^٢ + ٢^٣$

$= ٥ + ٤ + ٨$

$= ١٧$

نلاحظ أن: نهاية كثير الحدود عند نقطة تساوي قيمته عند تلك النقطة وتحسب بالتعويض المباشر

نشاط (٢)

ما قيمة: نها $(٦ - س^٢)$ $س \rightarrow ٤$

الحل:

بالتعويض المباشر (نعوض العدد - ٤ بدل كل س)

$نها (٦ - س^٢) = ٦ - (٤)^٢$ $س \rightarrow ٤$

$= ٦ - ١٦ = -١٠$

نشاط (٣)

جد قيمة النهايات التالية:

$$(أ) \lim_{s \rightarrow 1} (٣س + ٢س + ٧)$$

الحل:

بالتعويض المباشر (نعوض العدد ١ بدل كل س)

$$\lim_{s \rightarrow 1} (٣س + ٢س + ٧) = (٣ + ٢ + ٧)$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

تدريب

جد النهايات التالية:

$$(١) \lim_{s \rightarrow 1} (٢س - ٤س + ٤)$$

$$(٢) \lim_{s \rightarrow 2} (٥س - ٤س)$$

اختر الإجابة الصحيحة:

$$(١) \text{ ما قيمة } \lim_{s \rightarrow 2} (٥س + ٣س - ٦)$$

$$(أ) ٣٤ \quad (ب) ٣٤ - \quad (ج) ٤٣ \quad (د) ٤٣ -$$

$$(٢) \lim_{s \rightarrow 1} (٢س - ٣س + ١) \text{ تساوي:}$$

$$(أ) ٦ - \quad (ب) ٢ - \quad (ج) ٥ \quad (د) ١ -$$

$$= \frac{1 + \text{س}^2}{1 - \text{س}^3} \text{ نها}^3$$

(أ) ٣, ٥ (ب) ٤ (ج) ٥ (د) ١٠

$$= \frac{2}{1 - \text{س}} \text{ نها}^4$$

(أ) ٢ (ب) صفر (ج) ٢ - (د) غير موجودة

$$= \frac{2 - \text{س}}{\text{س}^2} \text{ نها}^5$$

(أ) ٣ (ب) ١ - (ج) ١ (د) ٣ -

نشاط (٤)

إذا كانت $\text{نها}^9 (3 - \text{س}^4) = 18$ جد قيمة الثابت أ؟

الحل:

بالتعويض المباشر نعوض عن س بالثابت أ

$$18 = (4 - \text{س}^3) 9 \text{ نها}^9 \quad \leftarrow$$

$$\frac{18}{9} = \frac{(4 - \text{س}^3)}{1} \quad \leftarrow$$

$$2 = 4 - \text{س}^3 \quad \leftarrow$$

$$6 = \text{س}^3 \quad \leftarrow$$

$$2 = \text{س} \quad \leftarrow$$

تدريبات

(١) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ فما قيمة الثابت ل؟

- (أ) ٨ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) ٣

(٢) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7$ فما قيمة الثابت ب؟

- (أ) ٤ (ب) ٤ - (ج) ١٠ - (د) ١٠

(٣) إذا علمت ان $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$ فما قيمة الثابت ك؟

- (أ) ١ - (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٦

نشاط (٥)

إذا كان $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ ، $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$ جد قيمة كل مما يلي؟

(أ) $\lim_{x \rightarrow 2} (3g(x) - f(x))$

(ب) $\lim_{x \rightarrow 2} (2g(x) \times f(x))$

(ج) $\lim_{x \rightarrow 2} (g(x) + f(x) - 4x + 3)$

(د) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)$

الحل:

$$(أ) \quad \text{نها} (٣ \text{ ق (س) هـ} - \text{نها} (٣ \text{ ق (س) هـ} - \text{نها} (س) = \text{نها} (س) - \text{نها} (س) \quad \text{س} \leftarrow ٦$$

$$= ٣ - \text{نها} (س) - \text{نها} (س) \quad \text{س} \leftarrow ٦$$

$$= ٣ - ٤ \times ٣ = ٣ - ١٢ = ٩$$

$$(ب) \quad \text{نها} (٢ \text{ ق (س) هـ} \times \text{نها} (٢ \text{ ق (س) هـ} = \text{نها} (س) \times \text{نها} (س) \quad \text{س} \leftarrow ٦$$

$$= ٢ \times \text{نها} (س) \times \text{نها} (س) \quad \text{س} \leftarrow ٦$$

$$= ٢ \times ٣ \times ٤ = ٢٤$$

$$(ج) \quad \text{نها} (٣ \text{ ق (س) هـ} + \text{نها} (٣ \text{ ق (س) هـ} - \text{نها} (٣ \text{ ق (س) هـ} = \text{نها} (س) + \text{نها} (س) - \text{نها} (س) \quad \text{س} \leftarrow ٦$$

$$= \text{نها} (س) + \text{نها} (س) - \text{نها} (س) \quad \text{س} \leftarrow ٦$$

$$= ٣ + ٦ - ٣ = ٦$$

$$= ٦ - ٧ = -١$$

$$(د) \quad \frac{\text{نها} (س)}{\text{نها} (س)} = \left(\frac{\text{نها} (س)}{\text{نها} (س)} \right) \quad \text{س} \leftarrow ٦$$

تدريب

إذا علمت أن نها ق (س) = ٦، نها هـ (س) = -٢، فجد قيمة كل مما يأتي:

$$(١) \quad \frac{\text{نها} (س)}{\text{نها} (س)} = \frac{\text{نها} (س)}{\text{نها} (س)} \quad \text{س} \leftarrow ١$$

$$(٢) \text{ نها } (٢) \text{ ق (س) } - ٣ \text{ هـ (س) } \leftarrow \text{س} ١$$

$$(٣) \text{ نها } (٣) \text{ ق (س) } \times ٤ \text{ هـ (س) } \leftarrow \text{س} ١$$

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

$$(١) \text{ إذا علمت ان نها ق (س) } = ٢ \text{ فإن: نها (س ق (س) - ٣) تساوى: } \leftarrow \text{س} ٢$$

$$\text{أ) } ١ \quad \text{ب) } ١ - \quad \text{ج) } ٢ \quad \text{د) } ٥$$

$$(٢) \text{ اذ كان نها ق (س) } = ٤, \text{ نها هـ (س) } = ٣ \text{ فان قيمة: نها (٣ ق (س) + هـ (س)) تساوى } \leftarrow \text{س} ٦$$

$$\text{أ) } ٧ \quad \text{ب) } ١٥ \quad \text{ج) } ١٨ \quad \text{د) } ٢٤$$

$$(٣) \text{ اذا كانت نها ق (س) } = ٣ \text{ فإن نها (س ق (س)) تساوى: } \leftarrow \text{س} ٣$$

$$\text{أ) } ٧ \quad \text{ب) } ٩ \quad \text{ج) } ١٢ \quad \text{د) } ١٦$$

الأهداف

يُجد نهاية اقتران إذا كان ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ =

تلخيص المحتوى:

عند حل مسائل النهايات نقوم بالتعويض المباشر، فإذا كان ناتج التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ = نعيد كتابة الاقتران بصورة مكافئة باستخدام التحليل الى عوامل للتخلص من العامل الصفري.

إذا كان ناتج التعويض المباشر في الاقتران النسبي مساوياً لـ $\frac{0}{0}$ فإن هذه الصورة تُسمى صورة غير معينة، أي لا تعطي نتيجة محددة، وللتخلص من هذه الصورة نُعيد كتابة الاقتران بصورة مكافئة بطرق عديدة إحداها استخدام التحليل إلى العوامل.

الأنشطة والتدريبات:

نشاط (١)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} \right)$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \frac{2^2 - 6 \times 2 + 8}{2 - 2} = \frac{0}{0} \quad (\text{نلجأ الى التحليل})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 4)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 4) \quad (\text{نأخذ } x - 2 \text{ عامل مشترك من البسط})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 4) = 2 - 4 = -2$$

نشاط (٢)

أوجد $\lim_{s \rightarrow 6} \frac{s+6}{s^2-36}$

الحل:

(نلجأ الى التحليل)

عند التعويض المباشر نحصل على $\frac{6+6}{6^2-36} = \frac{12}{0}$

(نحلل المقام فرق بين مربعين)

$$\lim_{s \rightarrow 6} \frac{s+6}{s^2-36} = \lim_{s \rightarrow 6} \frac{s+6}{(s-6)(s+6)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 6} \frac{1}{s-6}$$

$$= \frac{1}{6-6} = \frac{1}{0}$$

تذكر

• تحليل فرق المربعين هو:

$$s^2 - 36 = (s-6)(s+6)$$

نشاط (٣)

جد $\lim_{s \rightarrow 5} \frac{s^2-25}{s^3-125}$

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على $\frac{5^2-25}{5^3-125} = \frac{0}{0}$ نلجأ الى التحليل

(نحلل البسط فرق بين مربعين والمقام عامل مشترك)

$$\lim_{s \rightarrow 5} \frac{s^2-25}{s^3-125} = \lim_{s \rightarrow 5} \frac{(s-5)(s+5)}{(s-5)(s^2+5s+25)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 5} \frac{(s+5)}{(s^2+5s+25)} = \dots$$

نشاط (٤)

$$\text{جد } \frac{s^3 - 2s^2 + 2}{s^2 - 2s}$$

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على $\frac{0}{0}$

(نحل البسط عبارة تربيعية والمقام عامل مشترك)

$$\frac{(s-2)(s+1)}{s(s-2)} = \frac{s^3 - 2s^2 + 2}{s^2 - 2s}$$

$$= \frac{s+1}{s}$$

$$= \frac{1}{2} = \frac{1-2}{2}$$

نشاط (٤)

تذكر

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\text{جد } \frac{s^3 - 8}{s^2 - 2s}$$

الحل:

بالتعويض المباشر نحصل على $\frac{0}{0}$

(نحل البسط فرق بين مكعبين)

$$\frac{(s-2)(s^2 + 2s + 4)}{s(s-2)} = \frac{s^3 - 8}{s^2 - 2s}$$

$$= \frac{s^2 + 2s + 4}{s}$$

$$= 2 \times 2 - 2 \times 2 + 4 = 4$$

تدريبات

اختر الإجابة الصحيحة فيما يلي:

$$(١) \text{ نها } \frac{9-s^2}{3-s} \text{ نها } s \leftarrow 3, \text{ تساوي:}$$

- (أ) ٦ (ب) ٦ - (ج) صفر (د) غير موجودة

$$(٢) \text{ نها } \frac{25+s^2}{5+s} \text{ نها } s \leftarrow 5, \text{ تساوي:}$$

- (أ) صفر (ب) ٥ (ج) ١ (د) ١٠

$$(٣) \text{ نها } \frac{4-s^3-2}{4-s} \text{ نها } s \leftarrow 4, \text{ تساوي:}$$

- (أ) ٥ (ب) صفر (ج) ١ (د) غير موجودة

$$(٤) \text{ نها } \frac{1-s^2}{1+s} \text{ نها } s \leftarrow 1, \text{ تساوي:}$$

- (أ) صفر (ب) ١ - (ج) ١ (د) غير موجودة

جد النهايات التالية:

$$(١) \text{ نها } \frac{16-s^2}{4-s} \text{ نها } s \leftarrow 4, \text{ تساوي:}$$

$$(٢) \text{ نها } \frac{5+s^2-2}{1-s} \text{ نها } s \leftarrow 1, \text{ تساوي:}$$

$$(٣) \text{ نها } \frac{1+s^3-2}{1+s} \text{ نها } s \leftarrow 1, \text{ تساوي:}$$

$$(٤) \text{ نها } \frac{8-s^3}{2-s^2} \text{ نها } s \leftarrow 2, \text{ تساوي:}$$

$$(٥) \text{ نها } \frac{27-s^3}{6-s^2} \text{ نها } s \leftarrow 3, \text{ تساوي:}$$

$$(٦) \text{ نها } \frac{3-s^2}{9-s^2} \text{ نها } s \leftarrow 3, \text{ تساوي:}$$

نشاط (٥)

$$\text{جد نها}_{\substack{\leftarrow \\ \text{س}}} \left(\frac{6}{36-2\text{س}} - \frac{\text{س}}{36-2\text{س}} \right), \text{س} \neq \pm 6$$

الحل:

(نقوم بتوحيد المقامات)

بالتعويض المباشر نحصل على :

$$\begin{aligned} \text{نها}_{\substack{\leftarrow \\ \text{س}}} \left(\frac{6-\text{س}}{36-2\text{س}} \right) &= \text{نها}_{\substack{\leftarrow \\ \text{س}}} \left(\frac{6}{36-2\text{س}} - \frac{\text{س}}{36-2\text{س}} \right) \\ &= \text{نها}_{\substack{\leftarrow \\ \text{س}}} \left(\frac{\cancel{(6-\text{س})}}{(6+\text{س})(\cancel{6-\text{س}})} \right) \\ &= \frac{1}{6+\text{س}} \text{نها}_{\substack{\leftarrow \\ \text{س}}} \\ &= \frac{1}{12} = \frac{1}{6+6} = \end{aligned}$$

تدريب

$$\text{جد نها}_{\substack{\leftarrow \\ \text{س}}} \left(\frac{1}{1+\text{س}} - \frac{\text{س}^2}{1+\text{س}} \right), \text{س} \neq -1$$

الأهداف

يُجد نهاية اقتران متعدد القاعدة (متشعب) جبرياً.

تلخيص المحتوى:

إذا كان $ق(س)$ اقتران يُغير قاعدته عند $س = أ$. نبحث $نها ق(س)$ و $نها ق(س)$ $س \leftarrow أ^-$ $س \leftarrow أ^+$
 فإذا كانت $نها ق(س) = نها ق(س)$ $س \leftarrow أ^-$ $س \leftarrow أ^+$ ، فإن نهاية الاقتران موجودة عند $س = أ$.

الأنشطة والتدريبات:

نشاط (١)

$$\left. \begin{array}{l} ٣س - ٢س \quad , \quad ٤ > س \\ ٣ + ٢س \quad , \quad ٤ \leq س \end{array} \right\} = \text{إذا كان } ق(س)$$

جد: $نها ق(س)$ (إن وجدت) $س \leftarrow ٤$

الحل:

هنا تختلف قاعدتا الاقتران على يمين العدد ٤ ويساره فلا بد من حساب النهايتين اليمنى واليسرى

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها } (٣ + ٢س) \quad (س \leftarrow ٤^+) \quad \text{تعني ان } س < ٤ \text{ لذا وضع } (س \leftarrow ٤^+)$$

المقدار $٣ + ٢س$ عوضاً عن $ق(س)$

$$١١ = ٣ + ٤ \times ٢ =$$

$$\text{كذلك } \text{نها ق(س)} = \text{نها } (٣س - ٢س) \quad (س \leftarrow ٤^-)$$

$$٤٠ = ٨ - ٤٨ = ٣ \times ٣ - ٢(٤) = ٣$$

لاحظ ان: $نها ق(س) \neq نها ق(س)$ $س \leftarrow ٤^-$ $س \leftarrow ٤^+$ اذن $نها ق(س)$ غير موجودة

نشاط (٢)

$$\left. \begin{array}{l} ٥س + ١, \quad ٢ > س \\ ٢س, \quad ٢ \leq س \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

$$(١) \text{ ق}(٢) \quad (٢) \text{ نها ق(س)}$$

$$(٣) \text{ نها ق(س)} \quad (٤) \text{ نها ق(س)}$$

الحل:

$$(١) \text{ ق}(٢) = (٢) = ٤$$

$$(٢) \text{ نها ق(س)} = \text{نها} (٥س + ١) = ٦$$

$$(٣) \text{ نها ق(س)} = \text{نها} (٢س) = ٩$$

(٤) لاحظ أن س = ٢ هي القيمة التي يغير الاقتران عندها قاعدته لذا نحسب النهاية اليمنى واليسرى

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها} (٥س + ١) = ١١$$

$$\text{نها ق(س)} = \text{نها} (٢س) = ٤$$

$$\text{لاحظ ان: نها ق(س)} \neq \text{نها ق(س)}$$

اذن نها ق(س) غير موجودة

إذا كانت نها ق(س) \neq نها ق(س) ، فإن نها ق(س) غير موجودة.

تذكر أن

نشاط (٣)

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \geq س ، \quad ١ + س^٢ \\ ٣ < س ، \quad ٢ - س^٤ \end{array} \right\} = (س) ق$$

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وجدت):

أ (٢) ق (ب) نها ق (س) $س \leftarrow ١$

ج (ب) نها ق (س) $س \leftarrow ٤$ د (ب) نها ق (س) $س \leftarrow ٣$

الحل:

أ (٢) ق (٢) = $١ + س^٢ = ١ + ٤ = ٥$ (لاحظ العدد ٢ يقع ضمن الفترة $س \geq ٣$)

ب (ب) نها ق (س) = $س^٢ + ١ = ١ + ١ = ٢$ $س \leftarrow ١$

ج (ب) نها ق (س) = $(٢ - س^٤) = ٢ - ١٦ = -١٤$ $س \leftarrow ٤$

د (لاحظ أن $س = ٣$ هي نقطة تشعب (تحول) لذلك نحسب النهاية من اليمين واليسار

نها ق (س) = $(١ + س^٢) = ١ + ٩ = ١٠$ $س \leftarrow ٣^-$

نها ق (س) = $(٢ - س^٤) = ٢ - ٨١ = -٧٩$ $س \leftarrow ٣^+$

لاحظ أن: نها ق (س) = $(١ + س^٢) = ١٠$ $س \leftarrow ٣^-$

نها ق (س) = $(٢ - س^٤) = -٧٩$ $س \leftarrow ٣^+$

نشاط (٤)

$$\left. \begin{array}{l} ٢س - ١ ، ١ \neq س \\ ١ ، ١ = س \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

أجد ما يأتي:

ب نهاق(س)
س ← ١

أ ق(١)

الحل:

$$\text{أ) ق(١) = ١}$$

$$\text{ب) نهاق(س) = نهاق(٢س - ١) = ١ - ١ \times ٢ = ١ - ١ = ٠}$$

يدل الرمز س ← أ على أن س ≠ أ ولكنها تقترب من (أ) من اليمين ومن اليسار.

تدريب

$$\left. \begin{array}{l} ٢س - ٥س + ٤ ، ٤ \neq س \\ ٤ ، ٤ = س \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

أجد ما يأتي:

ب نهاق(س)
س ← ٤

أ ق(٤)

نشاط (٥)

إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} \text{أس} + ٤, \quad \text{س} > ٢ \\ ٥\text{س}^٢ + \text{أ}, \quad \text{س} \leq ٢ \end{array} \right\}$ وكانت نهاية ق(س) موجودة، فما قيمة الثابت أ؟
 $\text{س} \leftarrow ٢$

الحل:

بما أن النهاية موجودة فإن:

$$\text{نهاية ق(س)} = \text{نهاية ق(س)} \\ \text{س} \leftarrow ٢^- \quad \text{س} \leftarrow ٢^+$$

$$٢\text{أ} + ٤ = ٥ + ٢\text{أ}$$

$$٢\text{أ} + ٤ \times ٥ = ٤ + ٢\text{أ}$$

$$٢٠ + ٤ = ٤ + ٢\text{أ}$$

$$٢٠ - ٤ = ٢\text{أ} - ٤$$

$$١٦ = ٢\text{أ}$$

تدريب

إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} \frac{\text{س}^٢ - \text{أ}}{\text{س} - ٤}, \quad \text{س} \neq ٣^- \\ \text{س} - ٨, \quad \text{س} = ٣^- \end{array} \right\}$ وكانت نهاية ق(س) = ق(٣-)،
 أجد قيمة الثابت أ.

الأهداف

- (١) يوضح الاتصال عند نقطة من خلال الرسم لبياني لمنحنى الاقتران.
 (٢) يبحث الاتصال عند نقطة لكثيرات الحدود والاقتران متعدد القاعدة (متشعب)

تلخيص المحتوى:

يقال عن الاقتران q أنه متصل إذا أمكن رسم منحنى q على أي فترة من مجاله دون رفع القلم عن الورقة بحيث لا يوجد في منحناه ثقب أو قفزات.

يكون الاقتران q متصلاً عندما $s = a$ ، إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

(١) الاقتران q معرف عندما $s = a$ ؛ أي إن $q(a)$ عدد حقيقي.

(٢) نهـاق (s) موجودة.
 $s \leftarrow a$

(٣) نهـاق $(s) = q(a)$.
 $s \leftarrow a$

أما إذا لم يتحقق شرط أو أكثر من هذه الشروط، فإن الاقتران q يكون غير متصل عندما $s = a$.

الاقترانات كثيرة الحدود متصلة في مجالها.

إذا كان $q(s)$ ، هـ(س) اقترانين متصلين عند $s = a$ فإن:

- ١ (ق \pm هـ) (س) يكون متصلاً عند $s = a$.
- ٢ (ق \times هـ) (س) يكون متصلاً عند $s = a$.
- ٣ (ق / هـ) (س) يكون متصلاً عند $s = a$ ، حيث هـ(أ) $\neq 0$.

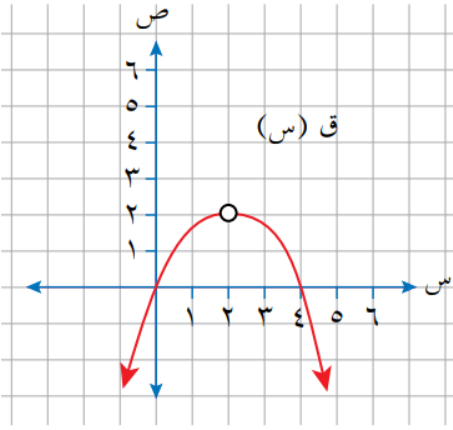
الأنشطة والتدريبات:

نشاط (١)

اذكر سبب عدم اتصال كل من الاقترانات التالية؟

الحل:

الاقتران ق(س) غير معرف عند $s = 2$ ، فظهر انقطاع على صورة **ثقب** في منحنى الاقتران.

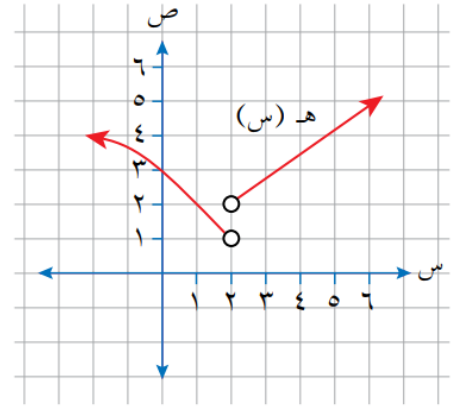


الحل:

نها $s \leftarrow 2$ (س) غير موجودة

لأن: $\lim_{s \rightarrow 2^+} \text{نها} (س) \neq \lim_{s \rightarrow 2^-} \text{نها} (س)$

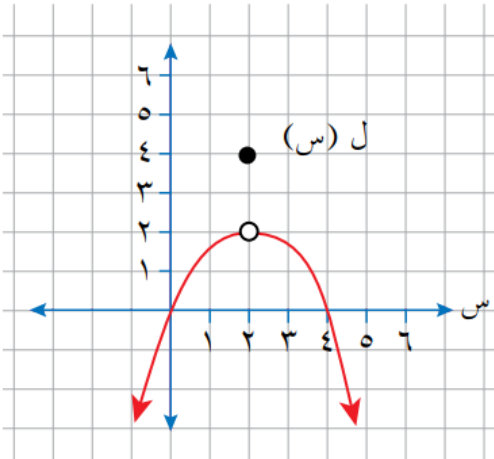
فظهرت **قفزة** في منحنى هـ عند $s = 2$



الحل:

نها $s \leftarrow 2$ (س) \neq ل(٢)

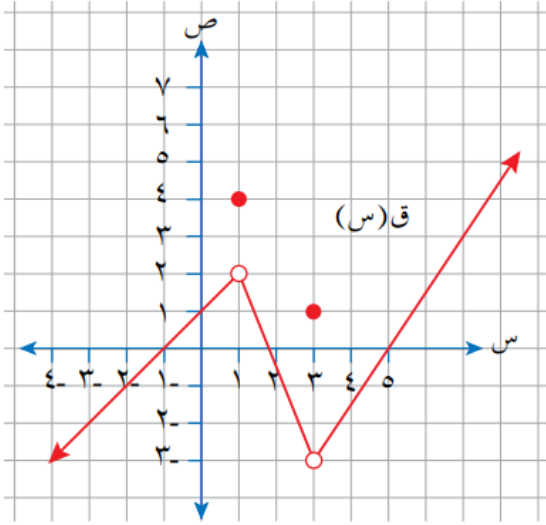
فظهرت **فجوة** في منحنى ل(س) عند $s = 2$



نشاط (٢)

الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق(س) حدد قيم س التي يكون الاقتران عندها غير متصل مع ذكر السبب؟

الحل:



ق(س) غير متصل عند $s = \dots\dots\dots$

لأن: $\dots\dots\dots$

ق(س) غير متصل عند $s = \dots\dots\dots$

لأن: $\dots\dots\dots$

نشاط (٣)

عند $s = -1$

ابحث اتصال الاقتران ق(س) = $s^3 + 2s + 1$

الحل:

$$ق(-1) = (-1)^3 + 2(-1) + 1 = -1 - 2 + 1 = -2$$

$$-2 = -1 + 2 - 1 =$$

$$\text{نهاية ق(س)} = \text{نهاية (س}^3 + 2\text{س} + 1\text{)} \\ \text{س} \leftarrow -1 \quad \text{س} \leftarrow -1$$

$$1 + (-1)^2 + (-1)^3 =$$

$$2 = -1 + 2 - 1 =$$

اذن ق(س) متصل عند $s = -2$

$$ق(-1) = \text{نهاية ق(س)} = -2 \\ \text{س} \leftarrow -1$$

نشاط (٤)

ابحث اتصال الاقتران ق(س) = ٣ س - ٢ س + ١ عند س = ٢

الحل:

ق (٢) =

نہا ق(س) =
س ← ٢

..... =

اذن ق(س) عند س = ٢

نشاط (٤)

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq ٢, \quad \frac{\text{س}^2 - ٢\text{س}}{\text{س} - ٢} \\ \text{س} = ٢, \quad ٤ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

الحل:

ق (٢) = ٤

$$\text{نہا ق(س)} = \frac{\text{س}^2 - ٢\text{س}}{\text{س} - ٢} = \frac{\cancel{\text{س}}(\text{س} - ٢)}{\cancel{\text{س}} - ٢} = \text{نہا س} = ٢$$

ق (٢) ≠ نہا ق(س)
س ← ٢

ق(س) غير متصل عند س = ٢

نشاط (٥)

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq ٥, \quad \frac{٢٥ - \text{س}^2}{٥ - \text{س}} \\ \text{س} = ٥, \quad ٥ + \text{س} \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق(س)}$$

ابحث اتصال الاقتران ق(س) عند س = ٥

الحل:

ق(٥) =

$$\text{هنا ق(س)} = \frac{٢٥ - \text{س}^2}{٥ - \text{س}} = \text{هنا} \quad \text{س} \leftarrow \text{س}$$

..... =

..... =

اذن الاقتران ق(س) عند س = ٥

تدريب

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq ١, \quad ٣ + \text{س} \\ \text{س} = ١, \quad ٤ \end{array} \right\} = \text{إذا كان ه(س)}$$

فابحث اتصال الاقتران ه عندما س = ١

نشاط (٦)

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > 1, \quad \text{س}^2 + 1 \\ \text{س} \leq 1, \quad \text{س}^2 \end{array} \right\} = \text{إذا كان ق (س)}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما $\text{س} = 1$

الحل:

$$\text{ق (1)} = 1 \times 2 = 2$$

لاحظ أن $\text{س} = 1$ هي نقطة تحول لذلك نبحث النهاية اليمنى واليسرى

$$\text{نهاق (س)} = \text{نهاق} \text{س}^2 + 1 = 1 + \text{نهاق} \text{س}^2 = 2 \quad \text{س} \leftarrow 1^-$$

$$\text{نهاق (س)} = \text{نهاق} \text{س}^2 = 2 \quad \text{س} \leftarrow 1^+$$

$$\text{نهاق (س)} = \text{نهاق (س)} = 2 \quad \text{س} \leftarrow 1^+$$

$$\text{اذن} \text{نهاق (س)} = 2 \quad \text{س} \leftarrow 1^- \quad (\text{موجودة})$$

$$\text{نهاق (س)} = 2 = \text{ق (2)} \quad \text{س} \leftarrow 1$$

ق (س) متصل عند $\text{س} = 1$

نشاط (٧)

إذا كان ق(س) = $\left. \begin{array}{l} ٣ - س ، س > ١ \\ س + ١ ، س \leq ١ \end{array} \right\}$ أبحث في اتصال الاقتران ق(س) عند س = ١.

الحل:

ق (١) =

هنا ق(س) = هنا $\begin{array}{c} س \leftarrow -١ \\ س \leftarrow -١ \end{array}$ =

هنا ق(س) = هنا $\begin{array}{c} س \leftarrow +١ \\ س \leftarrow +١ \end{array}$ =

هنا ق(س) = $\begin{array}{c} س \leftarrow ١ \\ س \leftarrow ١ \end{array}$

.....

ق(س) عند س = ١

تدريب

أبحث في اتصال الاقتران ق(س) = $\left. \begin{array}{l} ٧ - س ، س > ٢ \\ س - ٣ ، س \leq ٢ \end{array} \right\}$ ، عند س = ٢

عزيزي الطالب:
توكل على الله ثم قم بدراسة البطاقات السابقة جيدا وحاول الإجابة على الأنشطة
المختلفة في البطاقات، حتى تعم الفائدة على جميع الطلاب بإذن الله.
والله ولي التوفيق.