١٠
الجُزءُ الثّاني

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دولـــة فلـســطين
وزارة التربية والتعليم العالي

الرياضيات

المـؤلّفــون:

د. تحسين المغربي (منسقًا)

أ. أحلام صلاح

أ. سرين أبو عيشة

أ. نايف الطيطي

أ. وهبة ثابت

أ. مؤيد الحنجوري

مركز المناهج

أ. قيس شبانة

أ. نسرين دويكات

قررت وزارة التربية والتعليم العالي في دولة فلسطين
تدريس هذا الكتاب في مدارسها بدءاً من العام الدراسي ٢٠١٧/ ٢٠١٨ م

الإشراف العام

رئيس لجنة المناهج	د. صبري صيدم
نائب رئيس لجنة المناهج	د. بصري صالح
رئيس مركز المناهج	أ. ثروت زيد

الدائرة الفنية:	إشراف فني	أ. كمال فحماوي
	تصميم فني	م. منال رمضان

تحكيم علمي:	د. عمر غنام
تحرير لغوي:	أ. وفاء جيوسي
رسومات:	أ. سالم نعيم
قراءة:	أ. هدى سليم
متابعة المحافظات الجنوبية:	د. سمية النّخالة

الطبعة التجريبية
٢٠١٧ م/ ١٤٣٩ هـ

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي
مركز المناهج

moehe.gov.ps | mohe.pna.ps | mohe.ps
.com/MinistryOfEducationWzartAltrbytWaltlym
فاكس 2983250-2-970+ | هاتف 2983280-2-970+

حي الماصيون، شارع المعاهد
ص. ب ٧١٩ – رام الله – فلسطين
pcdc.edu.ps | pcdc.mohe@gmail.com

تقديم

يتصف الإصلاح التربوي بأنه المدخل العقلاني العلمي النابع من ضرورات الحالة، المستند إلى واقعية النشأة، الأمر الذي انعكس على الرؤية الوطنية المطورة للنظام التعليمي الفلسطيني في محاكاة الخصوصية الفلسطينية والاحتياجات الاجتماعية، والعمل على إرساء قيم تعزز مفهوم المواطنة والمشاركة في بناء دولة القانون، من خلال عقد اجتماعي قائم على الحقوق والواجبات، يتفاعل المواطن معها، ويعي تراكيبها وأدواتها، ويسهم في صياغة برنامج إصلاح يحقق الآمال، ويلامس الأماني، ويرنو لتحقيق الغايات والأهداف.

ولما كانت المناهج أداة التربية في تطوير المشهد التربوي، بوصفها علماً له قواعده ومفاهيمه، فقد جاءت ضمن خطة متكاملة عالجت أركان العملية التعليمية التعلمية بجميع جوانبها، بما يسهم في تجاوز تحديات النوعية بكل اقتدار، والإعداد لجيل قادر على مواجهة متطلبات عصر المعرفة، دون التورط بإشكالية التشتت بين العولمة والبحث عن الأصالة والانتماء، والانتقال إلى المشاركة الفاعلة في عالم يكون العيش فيه أكثر إنسانية وعدالة، وينعم بالرفاهية في وطن نحمله ونعظمه.

ومن منطلق الحرص على تجاوز نمطية تلقّي المعرفة، وصولاً لما يجب أن يكون من إنتاجها، وباستحضار واعٍ لعديد المنطلقات التي تحكم رؤيتنا للطالب الذي نريد، وللبنية المعرفية والفكريّة المتوخّاة، جاء تطوير المناهج الفلسطينية وفق رؤية محكومة بإطار قوامه الوصول إلى مجتمع فلسطيني ممتلك للقيم، والعلم، والثقافة، والتكنولوجيا، وتلبية المتطلبات الكفيلة بجعل تحقيق هذه الرؤية حقيقة واقعة، وهو ما كان له ليكون لولا التناغم بين الأهداف والغايات والمنطلقات والمرجعيات، فقد تآلفت وتكاملت؛ ليكون النتاج تعبيراً عن توليفة تحقق المطلوب معرفياً وتربوياً وفكرياً.

ثمّة مرجعيات تؤطّر لهذا التطوير، بما يعزّز أخذ جزئية الكتب المقررّة من المنهاج دورها المأمول في التأسيس؛ لتوازن إبداعي خلّاق بين المطلوب معرفياً، وفكرياً، ووطنياً، وفي هذا الإطار جاءت المرجعيات التي تم الاستناد إليها، وفي طليعتها وثيقة الاستقلال والقانون الأساسي الفلسطيني، بالإضافة إلى وثيقة المنهاج الوطني الأول؛ لتوجّه الجهد، وتعكس ذاتها على مجمل المخرجات.

ومع إنجاز هذه المرحلة من الجهد، يغدو إزجاء الشكر للطواقم العاملة جميعها؛ من فرق التأليف والمراجعة، والتدقيق، والإشراف، والتصميم، وللجنة العليا أقل ما يمكن تقديمه، فقد تجاوزنا مرحلة الحديث عن التطوير، ونحن واثقون من تواصل هذه الحالة من العمل.

وزارة التربية والتعليم العالي

مركز المناهج الفلسطينية

كانون أول / ٢٠١٧ م

مقدمة

تُعدّ مرحلة التمكين مرحلة تعليمية مهمة؛ كونها تأتي محصلة للمعارف والمفاهيم التي اكتسبها الطلبة من مرحلة التهيئة، وهي مرحلة تبدأ من الصف الخامس، وتنتهي بالصف العاشر، يميل الطلبة خلال هذه المرحلة إلى الاستقلالية في التفكير، والبحث، والاستقصاء؛ لذا ما ينبغي مراعاته إشراكهم في المناقشة، وحل المشكلات المطروحة التي يتمّ من خلالها بناء شخصية الطالب القادر على مجاراة التطور العلمي والتكنولوجي الهائل، في عالم مليء بالتغيرات التي تتطلب منه اكتساب روح المبادرة، والتكيف مع مستجدات العصر المتسارعة، بما يضمن له استكشاف المعارف، وفي هذه المرحلة أيضًا، يتمّ تقديم المحتوى التعليمي بقالب عصري؛ ليكونَ امتدادًا للمحتوى الرياضي الذي تمّ في مرحلة التأسيس، ويستمرّ المنهاج المبني على الأنشطة أصلًا في ربط التعلم بالسياقات الحياتية بطريقة جاذبة محببة؛ لتكوين طالب متفاعل نشط، ينفّذ الأنشطة والتمارين المتنوعة المطلوبة منه.

تشكّل العملية التعليمية التعلمية في هذه المرحلة الركيزة الأساسية في تمكين الطالب من المفاهيم والمعارف والمهارات، وتوظيفها ضمن سياقات مناسبة، تقوم على حل مشكلات حياتية، ولا يكون ذلك إلا بالقيام بأنشطة محفّزة، ومثيرة للتفكير، تحاكي البيئة الفلسطينية في المجالات الاجتماعية، والاقتصادية، وغيرها، كما تمّ توظيف التكنولوجيا في تنفيذ هذه الأنشطة بطريقة سلسة جذابة، مع الأخذ بعين الاعتبار التدرج في مستوى الأنشطة، بما يتناسب ومستوياتِ الطلبة، والتعامل مع كل مستوى بما يضمن علاج الضعف، وصولًا لتنمية مهارات التفكير العليا لديهم.

تكوّن هذا الكتاب من ثلاث وحدات تعليمية، تناولت الوحدة الرابعة منه الاقترانات المثلثية، بما يشمل القياس الدائري والستيني وتطبيقات عليها، وتناولت الوحدة الخامسة الهندسة ضمن عناوين الإنشاءات الهندسية والتكافؤ، وتناولت الوحدة السادسة الرياضيات المالية، حيث قدمت بعض المفاهيم البسيطة في ذلك الموضوع.

أملُنا بهذا العمل، وقد حققنا مطالب العملية التعليمية التعلمية كافة، من خلال منهاج فلسطينيّ واقعيّ منظّم، وإننا إذ نضع بين أيديكم ثمرة جهد متواصل، وكلنا ثقة بكم معلمين ومشرفين تربويين ومديري مدارس، وأولياء أمور، وخبراء ذوي علاقة في رفد هذا الكتاب بمقترحاتكم، وتغذيتكم الراجعة، بما يعمل على تجويده وتحسينه؛ لما فيه مصلحة الطلبة قادة المستقبل.

المؤلفون

المحتويات

الوحدة ٤ الرابعة

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

سهل مرج ابن عامر

تُعَدُّ أيّامُ الحصادِ من أجملِ الأيّامِ الصيفيّة التي يطولُ فيها شروق الشّمسِ.
استخدم خصائصَ الاقتراناتِ المثلثية في تحديد عدد ساعات شروق الشّمس طوالَ أيّامِ السّنة. حاولْ معرفةَ عددِ ساعاتِ شروقِ الشّمسِ في يومُ ١٠/حزيران.

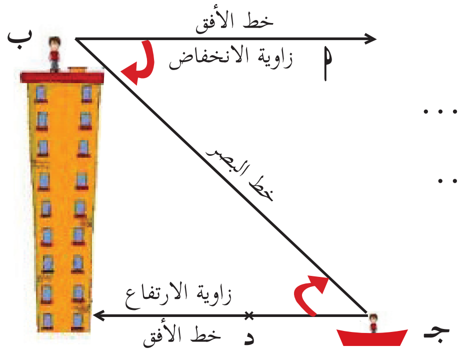
الاقترانات الدائريّة المتنوّعة وخصائصُها تساعدُ في فَهْمِ الكثير من الظواهر الطبيعيّة الدوريّة؛ كموجات الصوت، وبرامجَ الصّور المتحركة، والموجات الكهرومغناطيسيّة، وغيرها، التي يُمكن توظيفُها في حلِّ مسائلَ تطبيقيّةٍ، وتفسيرِ الكثيرِ من الظّواهر الطبيعيّة، والمواقف الحياتيّة من خلال تحقيق الأهداف الآتية:

١- التعرُّف إلى مفهوم الزوايا الموجّهة.
٢- التعرُّف إلى مفهوم قياسي الزاوية: الستيني والدائري.
٣- التحويل من القياس الستيني إلى القياس الدائري وبالعكس.
٤- التعرُّف إلى الوضع القياسي للزاوية، والزوايا المتكافئة.
٥- تمثيل منحنيات الاقترانات الدورية (المثلثية) بيانيّاً.
٦- إثبات متطابقاتٍ مثلثيّة.
٧- حلّ معادلاتٍ مثلثيّة.

(٤ - ١) الزّاوية في الوضع القياسي
The Angle in Standard Position

نشاط ١

يراقب شخص من منارة على شاطئ غزة، صيّاداً في قاربه في البحر. يصنع خطُّ البصرِ بينهما مع خطّي الأفق لكلٍّ منهما زاويتين: إحداها تُسمّى زاويةَ الارتفاع، و الأخرى تُسمّى زاويةَ الانخفاض.



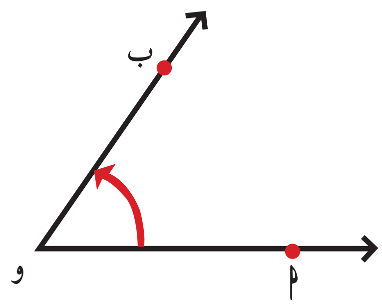
زاوية الانخفاض في الصورة هي: ......، وضلعاها هما: ......، ......

زاوية الارتفاع في الصورة هي: ......، وضلعاها هما: ......، ......

ألاحظ العلاقة بين قياس زاوية الارتفاع، وقياس زاوية الانخفاض.

نشاط ٢

في الشكل المجاور



- ضلع الابتداء للزاوية ﻫ و ب هو: ......
- ضلع الانتهاء لها هو: .... ، لماذا ؟ ....
- اتّجاه حركة ضلع الابتداء لينطبق على ضلع الانتهاء هو: ......
- تُسمّى زاوية ﻫ و ب زاويةً موجّهة.

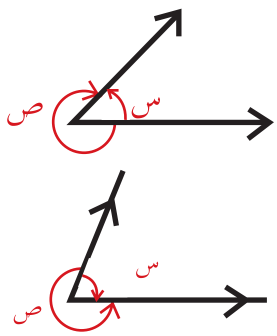
أتعلّم: الزاوية الموجّهة: هي زاويةٌ يتحدّد اتّجاهُها باتّجاه دوران ضلع الابتداء لينطبقَ على ضلع الانتهاء، وتكون الزاويةُ الموجّهة زاويةً موجبةً إذا كان اتّجاه الدوران عكس عقارب الساعة، وتكون الزاويةُ الموجّهة سالبةً إذا كان اتّجاه الدوران مع عقارب الساعة.

نشاط ٣ في الشكل المجاور:

∢س = ٦٠°،

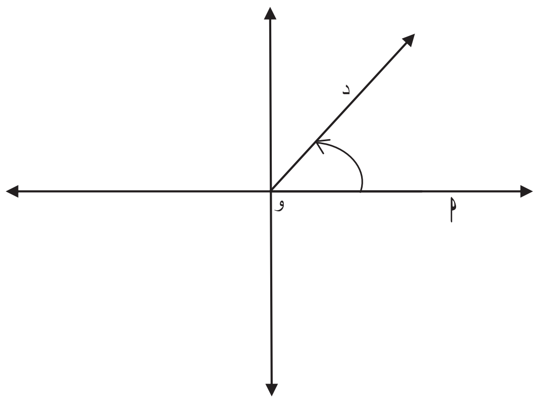
∢ص = ...

∢ص = ٢٨٠°، ∢س = ...



نشاط ٤ أُسمّي الزاوية الموجّهة في الشّكل ....

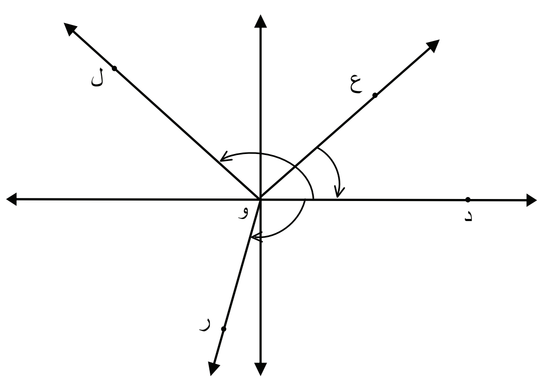
ضلع الابتداء لها هو $\overleftarrow{\text{و ٲ}}$ ، ضلع الانتهاء لها هو: ....، رأس الزاوية هو: ....



أتعلّم: تكون الزاويةُ في الوضع القياسي إذا كان رأسُها نقطةَ الأصل، وانطبق ضلعُ الابتداء على محور السّينات الموجب.

نشاط ٥ في الشكل المجاور: الزاوية الموجهة ع و د ليست في وضعٍ قياسيّ؛ لأنّ ....

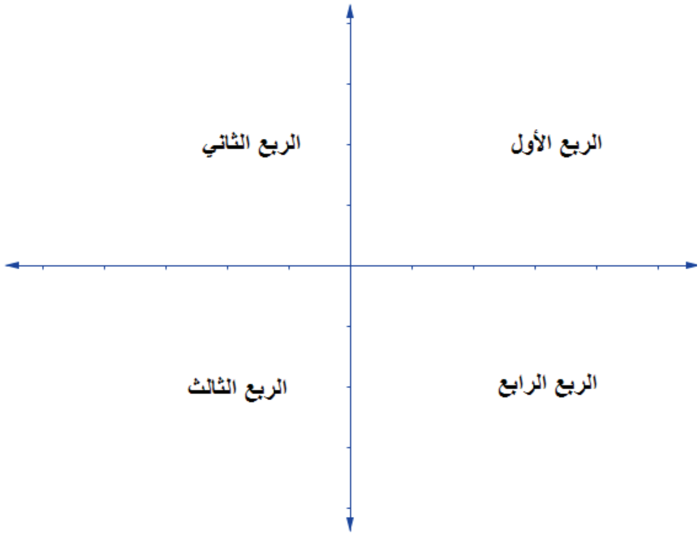
- الزاوية الموجّهة .... في الوضع القياسي؛ لأنّ ....
- الزاوية الموجّهة د و ر في ....، لأنّ ....



نشاط ٦

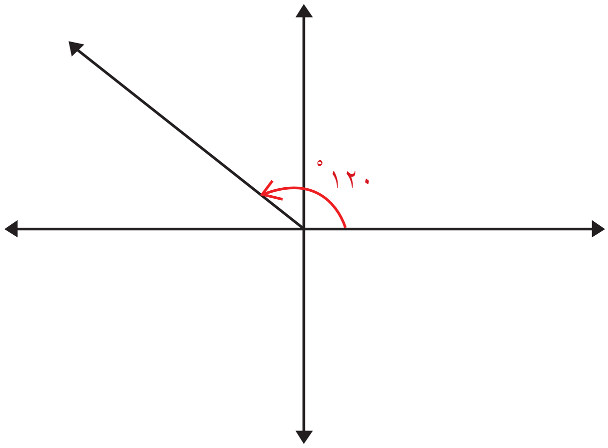
محورا الإحداثيّات يقسمان المستوى إلى .... أرباع

تُرتَّبُ الأرباع باتّجاه ....



أستنتج أنّ:

- إذا كانت ∠هـ زاويةً في الوضع القياسيّ، وكان ٠° < ∢هـ < ٩٠°، فإنّ ضلع انتهائها يقع في الرّبع الأوّل.
- إذا كانت ∠هـ في الوضع القياسيّ، وكان ..... < ∢هـ < ......، فإنّ ضلعَ انتهائها يقع في الرّبع الثاني.



نشاط ٧

أرسمُ الزّوايا التي قياسها ١٢٠ ْ ، ٢٢٥ ْ ، -٣٠٠ ْ ، -٦٠ ْ في الوضع القياسي، ثم أحدّدُ الربع الذي تقع فيه:

تقع الزّاوية التي قياسها ١٢٠° في الربع ....

بينما تقع الزّاوية التي قياسها ٢٢٥° في الربع ....

تقع الزّاوية التي قياسها – ٣٠٠° في الربع ....

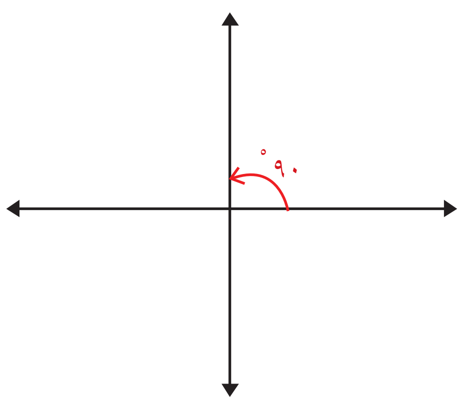
تقع الزّاوية -٦٠° في الربع ....

أتعلّم: عند رسم زاويةٍ في الوضع القياسي فإنّ ضلعَ انتهائها يحدّدُ موقعَها في المستوى الديكارتي.

نشاط ٨

أرسمُ الزّوايا التي قياسها:

٩٠°، ١٨٠°، -٩٠°.



ينطبق ضلعُ انتهاءِ الزّاوية التي قياسها ٩٠ ْ على محور ....

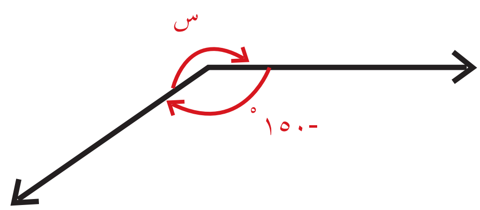
بينما ينطبق ضلعُ انتهاء الزّاوية التي قياسها ١٨٠ ْ على ....، أما ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها -٩٠° فينطبق على ....

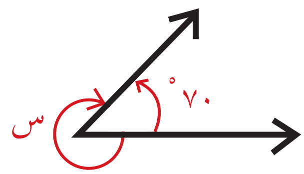
تُسمّى الزّاوية التي في الوضع القياسي، وينطبق ضلعُ انتهائها على أحد المحاور الإحداثيّة زاويةً رُبعيّةً.

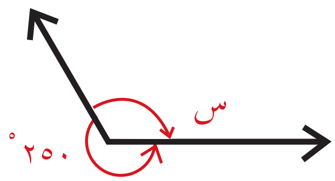
أعطِ ثلاثة أمثلة لزوايا ربعيّة: ....، ....، ....

تمارين ومسائل:

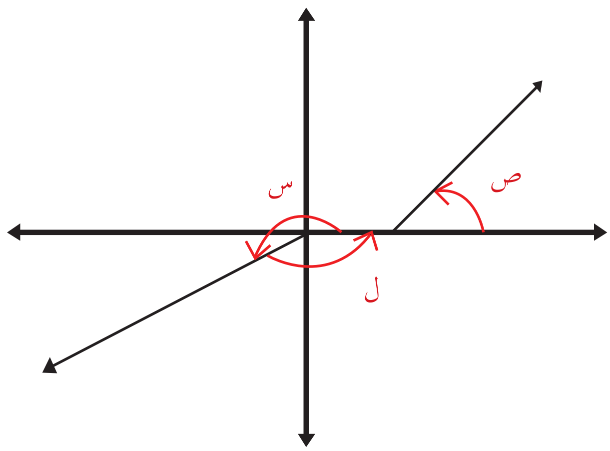
(١) ما قيمةُ س التي تُمثّل قياس الزاوية في كلٍّ من الأشكال الآتية:

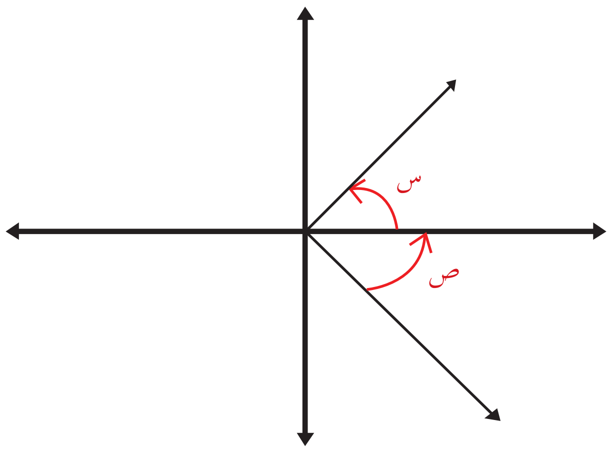






(٢) أميّزُ الزّوايا التي في الوضع القياسي:





(٣) أُحدّدُ الرّبع من المستوى الذي تقع فيه الزّوايا الآتية:

-١٢٠° ، ١٣٠° ، -٢٥٠° ، ٣٢٠° ، ٤٥٠°

قياس الزوايا
Angles and their Measurements
(٤ - ٢)

نشاط ١

تعيش المدن الفلسطينيّة أزمةً مروريّةً خانقة؛ مما يعرقلُ عمل طواقمِ الدّفاعِ المدني والإسعاف، ويؤخّرُ المواطنين عن أعمالهم يوميّاً؛ لذلك ارتأت البلديّاتُ إنشاءَ الدواوير عند مفترقات الطّرق، ومداخل المدن.

عند حركة جسمٍ في مسارٍ دائريٍّ، فإنّ الزّاويةَ المركزيّةَ تتغيّر مع الزمن حسب العلاقة:

السرعة الزاوية (ω)= $\frac{\text{السرعة الخطيّة للجسم(ع)}}{\text{نصف قطر المسار الدائري (نق)}}$

إذا سارت سيّارةٌ حول دوّارٍ، نصفُ قطرِه ٠,٠٠٥كم، وأشار عدّاد السيّارة إلى سرعةٍ خطيّة ٣٠ كم/ساعة. أجدُ معدل تغيّر الزاوية المركزية بالدقيقة (السرعة الزاوية للسيارة).

ω = $\frac{\text{ع}}{\text{نق}}$ ، ع ، نق: أعداد تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقيّة الموجبة.

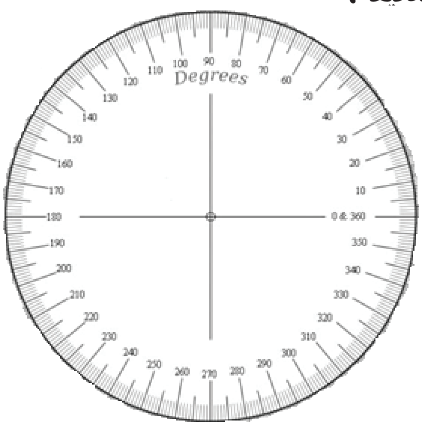
ω ينتمي إلى ....؛ لأنّ ناتج قسمة عددين حقيقيّين هو عددٌ حقيقي، ويُسمّى التغير في القياسَ الدائريّ للزاوية، ووحدته راديان/دقيقة.

٣٠ كم / ساعة = ... كم/دقيقة.

ω = $\frac{٠,٥}{٠,٠٠٥}$ = ... راديان/دقيقة.

نشاط ٢

في الشّكل المجاور، تمّ تقسيمُ الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوياً في الطّول، فإنّ الزاوية المركزيّة التي تقابل كلُّ قوسٍ، قياسها ١°. والزاوية التي تقابل ٥٠ قوساً يكون قياسها ....°.
والدرجة الواحدة تقسم إلى ٦٠ جزءاً أصغر منها، وهو الدقيقة،
وتُكتَبُ على الصورة: ١° = (...)´



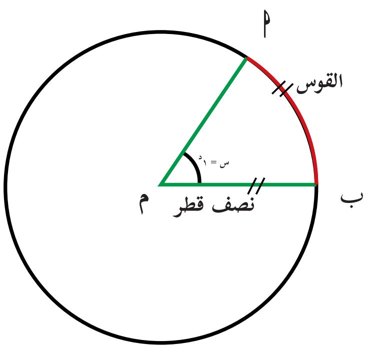
والدقيقة الواحدة تُقسم إلى ٦٠ جزءاً أصغر منها، وهو الثانية،
وتُكتَبُ على الصورة: ١´ = ٦٠´´
الزّاوية ٣٢,٦° = ٣٢° و ٠,٦ × ٦٠´ = (...)´
= ٣٦´ ٣٢°

يُسمّى قياسُ الزّاوية بالدرجات والدقائق والثواني القياسَ الستيني للزّاوية.

أفكر

لماذا سُمِّي القياسُ الستيني بهذا الاسم؟

نشاط ٣



في الشكل المجاور، دائرةٌ مركزها م ونصفُ قطرِها وحدة واحدة.
طول القوس ٲ ب = طول نصف قطر الدائرة
طول القوس الذي يقابل الزاوية المركزية التي قياسها (س)
في الشكل = ...

أتعلم: يكون قياس الزاوية س بالقياس الدائري = ١ راديان (Radian) ونرمز له بالرمز ١د

تعريف: **الزّاوية النصف قطريّة: هي زاويةٌ مركزيّةٌ في دائرةٍ يقابلها قوسٌ طولُه يساوي طولَ نصفِ قطرِ الدائرة، ويُرمَزُ لها بالرمز (١د)، وهي وحدة قياس الزاوية بالقياس الدائري للزّوايا.**

أفكر

ما هو القياس الدائري إذا كانت الزّاوية مرسومةً في دائرةٍ نصف قطرها نق ≠ ١ ؟

نشاط ٤

محيط الدائرة = ٢ نق π ⟵ محيط دائرة الوحدة = ...

الدورة الكاملة = ٣٦٠° يقابلها ٢ $\pi^{\text{د}}$

⟵ $\pi^{\text{د}}$ يقابلها .... درجة

باستخدام التقريب (π = ٣,١٤) نستنتج أنّ: ١$^{\text{د}}$ = ٥٧,٣°

أُكمل: ٣$^{\text{د}}$ = ...° ، ١,٥$^{\text{د}}$ = ...°

نشاط ٥

أوّلاً: أُحوّلُ قياس الزّوايا الآتية من درجات إلى زاوية نصف قطرية (راديان):

٩٠° ، ١٢٠° ، -٢٢٥°

- ٩٠° :

للتحويل من درجات إلى دائري: $\pi^{\text{د}}$ يقابلها ١٨٠°

٩٠ درجة ⟵ هـ بالتقدير الدائري

$$هـ = \frac{٩٠°}{١٨٠°} \times \pi^{\text{د}} = \frac{١}{٢}\pi^{\text{د}}$$

- $١٢٠° = \frac{١٢٠°}{١٨٠°} \times \pi^{\text{د}} =$ ....

- ٢٢٥° = ...

ثانياً: أُحوّل قياس الزّوايا من دائري إلى درجات:

$$\frac{٥}{٦}\pi^{\text{د}}، \frac{٣}{٤}\pi^{\text{د}}، -\frac{١٥}{١٨}\pi^{\text{د}}$$

للتحويل من دائري إلى درجات: $\pi^{\text{د}}$ يقابلها ١٨٠ درجة

$\frac{٥}{٦}\pi^{\text{د}}$ ⟵ س بالدرجات.

$$س = \frac{٥}{٦}\pi^{\text{د}} \times \frac{١٨٠°}{\pi^{\text{د}}} = ١٥٠°$$

زاوية قياسها $= \frac{٣}{٤}\pi^{د} = \frac{٣}{٤}\pi^{د} \times \frac{١٨٠^\circ}{\pi^{د}} = ...^\circ$

زاوية قياسها $= -\frac{١٥}{١٨}\pi^{د} = ...^\circ$

زاوية قياسها ٢^{د}: باستخدام (π=٣٫١٤) ، ٢^{د}= ....$^\circ$

أُكملُ الجدول َالآتي:

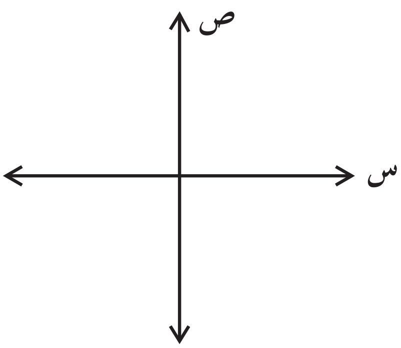
س$^\circ$	٣٠	٤٥	٩٠	١٣٥	١٥٠	١٨٠	٢٤٠		٣٠٠	٣١٥		-١٢٠
هـ^{د}		$\frac{\pi}{٤}$				π		$\frac{٣\pi}{٢}$			$-\pi$	

نشاط ٦

- أرسمُ الزاويا الآتية في الوضع القياسيّ:

١٢٠$^\circ$ ، -٢٤٠$^\circ$ ، ٥٠$^\circ$ ، ٤١٠$^\circ$

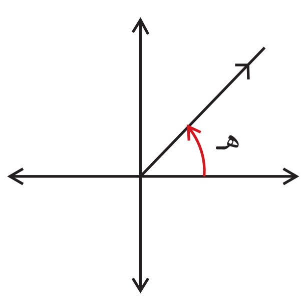
ماذا ألاحظ.....؟

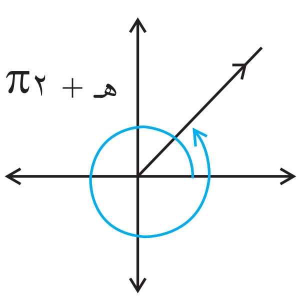


أتعلم: يُقال لزاويتيْن أنّهما متكافئتان: إذا كان لهما ضلع الابتداء نفسه، وضلع الانتهاء نفسه.

في الشكل المجاور:

$\angle$هـ تكافئ $\angle$هـ + ٢π





وبشكلٍ عام:

∠هـ تكافئ ∠هـ + ٢نπ ، ∢ هـ بالقياس الدائري.

∠هـ تكافئ ∠هـ + ٣٦٠ن ، ∢ هـ بالقياس الستيني ، حيث ن عدد صحيح.

نشاط ٧

أجدُ ثلاث زوايا مكافئة لكلٍّ من الزوايا التي قياسها: ٦٠°، $\frac{\pi}{٤}$ د .

الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° = ٤٢٠°، ن = ١

الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° × ٢ = ...، ن = ٢

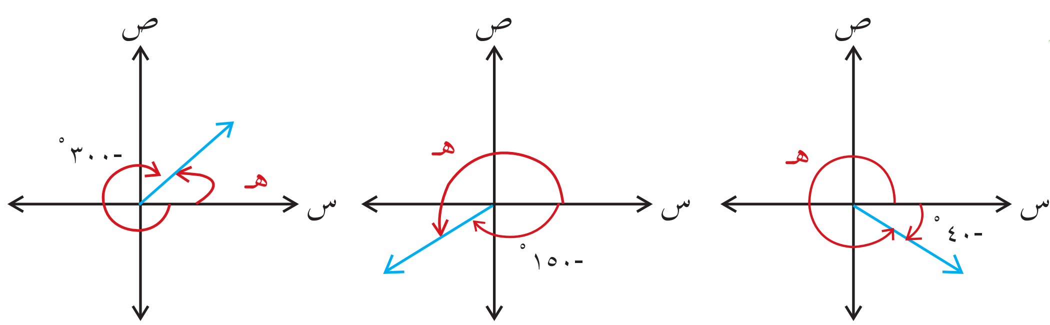
الزاوية التي قياسها ٦٠° تكافئ الزاوية التي قياسها ٦٠° + ٣٦٠° × -١ = ...، ن = ...

الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٤}$ د تكافئ .... عندما ن = ١

الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٤}$ د تكافئ $\frac{-٧\pi}{٤}$ د عندما ن =..............

نشاط ٨

أجدُ قياسَ الزّاوية هـ في كلٍّ من الأشكال الآتية:



∢ هـ = ...   ∢ هـ = ...   ∢ هـ = ...

تمارين ومسائل:

(١) أ) أحوّل القياسات الآتية من الدرجات إلى راديان:

٢٤٠° ، -٩٠° ، ٤٢٠° ، -١٣٥°

ب) أحوّل القياسات الآتية من راديان إلى درجات:

$\frac{٥\pi}{٦}$ ، $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{-١١\pi}{١٢}$ ، $\frac{-\pi}{٤}$ ، $٢,٥^{د}$

(٢) أوجد ثلاث زوايا تكافئ الزاوية التي قياسها ٥٠°.

(٣) أوجد ثلاث زوايا تكافئ الزاوية التي قياسها $\frac{\pi}{٤}^{د}$

(٤) أعطِ زاويتيْن: قياس إحداهما موجب، والآخر سالب، مكافئتين لكلٍّ من الزّوايا التي قياسها:

-٢٠٠° ، ١٢٠° ، $\frac{٢\pi}{٣}^{د}$ ، $-\frac{\pi}{٤}^{د}$

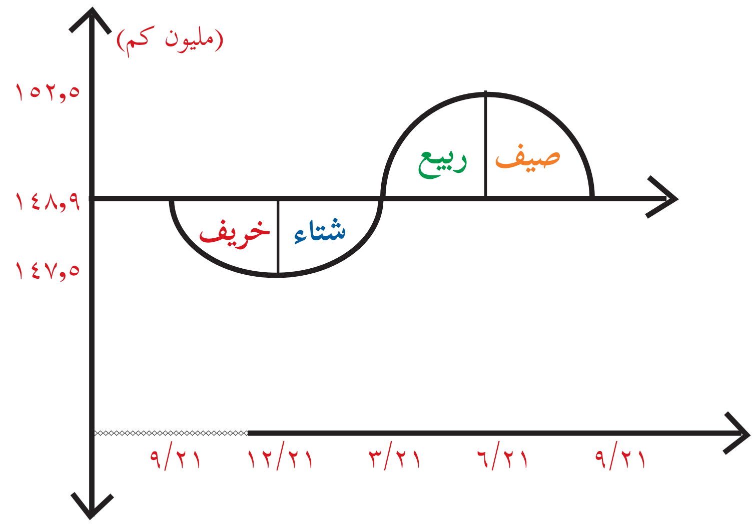
(٥) درّاجة هوائيّة قُطر عجلتها ٩٠سم، تسير بسرعةٍ خطيّةٍ مقدارها ٢٥كم/ساعة، ما معدّل تغيّر الزّاوية المركزيّة لعجلة الدراجة في الثانية ؟

الاقترانات المثلثية
Trigonometric Functions

(٤ - ٣)

نشاط ١

إنّ حركة الأرض حول الشمس تتّخذ اقتراناً دوريّاً، وعليه يَسهُلُ علينا دراسةُ الظواهر الطبيعيّة التي تحدث في فصول السنة كافّةً، التي تنتج عن هذه الحركة.

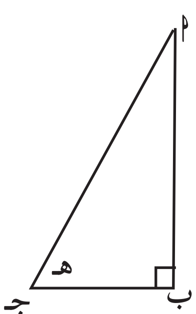


- أبعد ما تكون الأرض عن الشمس يوم .... ويقدر بعدها ١٥٢ مليون كم
- أقرب ما تكون الأرض إلى الشمس يوم .... ويقدر بعدها ....
- يوم الانقلاب الشتوي هو ....
- يوم الاعتدال الخريفي هو ....
- يبدأ الربيع يوم .... وينتهي يوم ....

نشاط ٢

في المثلث القائم الزاوية أ ب جـ ، النسب المثلثية للزاوية الحادة التي قياسها هـ

جاهـ = $\frac{\text{أب}}{\text{أجـ}}$ ، جتاهـ = ... ، ظاهـ = ...



أفكر

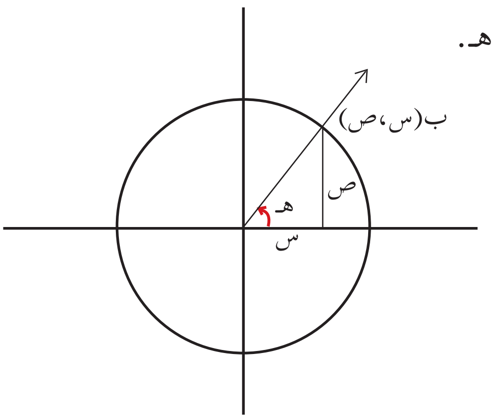
هل يمكن إيجاد النسب المثلثية للزوايا التي قياسها أكبر من ٩٠°، أو قياسها سالب؟

أتعلّم: الدائرةُ التي مركزُها نقطةُ الأصل، وطولُ نصفِ قطرها وحدة واحدة، تُسمَّى دائرةَ الوحدة.

معادلة دائرة الوحدة: $س^{٢} + ص^{٢} = ١$

نشاط ٣

لتكنْ هـ زاوية في الوضع القياسي، إذا قطع ضلعُ انتهائها دائرةَ الوحدة في النقطة ب (س،ص). أجدُ النسب المثلثيّة الأساسيّة للزّاوية هـ.



جاهـ = $\frac{ص}{١}$ = ص ، جتاهـ = ...،

ظاهـ = ...

بشكلٍ عام: إحداثيّات النقطة ب (جتاهـ ، جاهـ).

أتعلّم: إذا قطع ضلعُ انتهاءِ الزاوية هـ في الوضع القياسي دائرةَ الوحدة في النقطة ب (س،ص)، فإنّه يمكن تعريفُ الاقترانات المثلثية جاهـ = ص ، جتاهـ = س، ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ ، س ≠ ٠ وتُسمّى هذه الاقترانات، الاقتراناتِ المثلثية الأساسيّة للزّاوية هـ.

أفكر

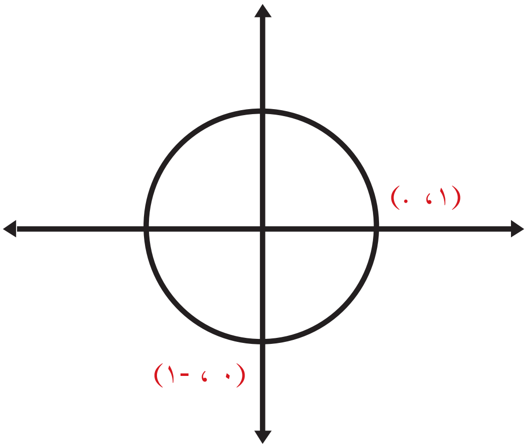
العلاقة من أ ⟵ ب (س ، ص) تشكل اقتراناً هـ ∈ أ حيث أ هي مجموعة الزوايا في الوضع القياسي.

ملاحظة: إذا كانت النقطة ب (س ، ص) تقع على دائرة الوحدة،

فإن -١ ≤ س ≤ ١، و -١ ≤ ص ≤ ١ ، وعليه فإن -١ ≤ جتاهـ ≤ ١ و -١ ≤ جاهـ ≤ ١

نشاط ٤

أجدُ الاقترانات المثلثية للزّوايا الربعيّة:
٠° ، ٩٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٣٦٠°.



- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (١،٠)، وينتج جا٠°= .... ، جتا٠°=.......، ظا٠°= ....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٩٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (.....، ....)، وينتج جا٩٠°= .... ، جتا٩٠°=.......، ظا٩٠°= ....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ١٨٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (.....، ....)، وينتج جا١٨٠°= .... ، جتا١٨٠°=.......، ظا١٨٠°= ....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٢٧٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (.....، ....)، وينتج جا٢٧٠°= .... ، جتا٢٧٠°=.......، ظا٢٧٠°= ....
- ضلع انتهاء الزاوية التي قياسها ٣٦٠° يقطع دائرة الوحدة في النقطة (.....، ....)، وينتج جا٣٦٠°= .... ، جتا٣٦٠°=.......، ظا٣٦٠°= ....
- أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزّاوية الربعية (س°)	جاس	جتاس	ظاس
صفر	صفر		
٩٠°			
١٨٠°		-١	صفر
٢٧٠°			
٣٦٠°		١	٠

نشاط ٥

إذا قطع ضلعُ انتهاء الزاوية التي قياسها هـ° دائرةَ الوحدة في النقطة أ ($-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) فإنّ:

- جاهـ = $\frac{١}{٢}$ ؛ لأن الإحداثي الصادي لنقطة تقاطع ضلع انتهائها هو ....

جتا هـ = ... ؛ لأنّ: ....

ظاهـ = ...

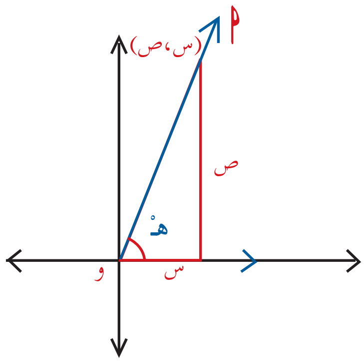
نشاط ٦

- أرسم دائرة الوحدة
- أرسم زاويةً قياسها هـ° في الوضع القياسي
- نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية مع الدائرة هي النقطة أ (س ، ص).
- تكون إشارةُ س موجبةً، إذا وقعت النقطة أ في الربع ....، أو الربع .... من المستوى.
- تكون إشارةُ ص موجبة، إذا وقعت النقطة أ في الربع ....، أو الربع ....من المستوى.

أتعلَّمُ: تتحدد إشارة الاقترانات المثلثية للزاوية هـ حسب الربع الذي تقع فيه.

إذا كانت هـ زاويةً في الوضع القياسي، النقطة أ (س ، ص) تقع على ضلع انتهائها، بعد النقطة

أ (س ، ص) عن نقطة الاصل = ...



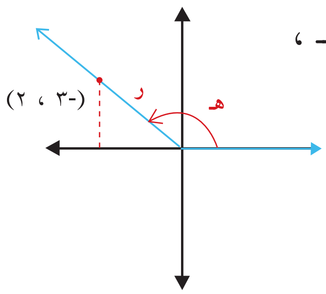
جاهـ، جاهـ = $\frac{ص}{ر}$

جتاهـ = $\frac{س}{ر}$

ظاهـ = $\frac{ص}{س}$ ، س $\neq$ صفر

نشاط ٧

في الشكل المجاور، أجدُ قيم الاقتراناتِ المثلثيّة جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ:

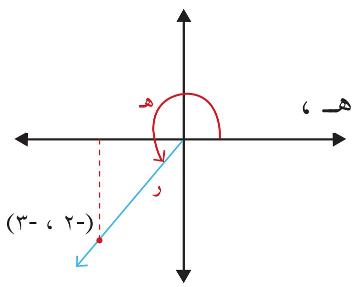


ر= $\sqrt{(٢)^٢ + (-٣)^٢}$ = ...

جاهـ = ...، جتاهـ = ...، ظاهـ = ...

نشاط ٨

في الشكل المجاور، أجدُ قيم الاقتراناتِ المثلثيّة جاهـ ، جتاهـ ، ظاهـ:



ر = ...

جاهـ = ... ، جتاهـ ....

ظاهـ = ...

نشاط ٩

أجد قيمة ٢جا ٣٠°جتا ٣٠° وأقارنه بقيمة جا ٦٠°

٢جا ٣٠°جتا ٣٠° = ٢ × ......× ..... = ...

جا ٦٠° = ... ماذا تلاحظ؟

أجد:

- ٢جا ٤٥°جتا ٤٥° = ٢ × ..... × ..... = ...
- جا ٩٠° = ... ماذا تلاحظ؟ ماذا تلاحظ؟

أستنتج أن: جا٢أ = ٢جاأجتاأ

نشاط ١٠

أجد قيمة جا$\frac{\pi}{٨}$ جتا$\frac{\pi}{٨}$

جا$\frac{\pi}{٨}$ جتا$\frac{\pi}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$ جا $\frac{\pi}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ × .... = $\frac{١}{٢\sqrt{٢}}$

نشاط ١١

أجد قيمة جتا^{٢} ٣٠° _ جا^{٢} ٣٠° وأقارنه بقيمة جتا ٦٠°

جتا^{٢} ٣٠° _ جا^{٢} ٣٠° = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$ _ $(\ldots)^{٢}$

جتا ٦٠° = ... ماذا تلاحظ؟

أستنتج أن: جتا ٢أ = جتا^{٢} أ _ جا^{٢} أ ، جتا ٢أ = ٢جتا^{٢} أ _ ١ ، جتا ٢أ = ١ _ ٢جا^{٢} أ

نشاط ١٢

أجد ناتج جتا^{٢} ١٥° _ جا^{٢} ١٥° دون استخدام الحاسبة

جتا^{٢} ١٥° _ جا^{٢} ١٥° = جتا..... = ...

نشاط ١٣

أ زاوية منفرجة بحيث جتا أ = $-\frac{٤}{٥}$ ، أجد قيمة جتا ٢أ.

باستخدام المتطابقة جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١

جا^{٢} أ + $\left(\frac{-٤}{٥}\right)^{٢}$ = ١

جا^{٢} أ = ...

جا أ = ± $\frac{٣}{٥}$ ، الزاوية أ منفرجة، وتقع في الربع ....

اذن جا أ = ...

لإيجاد قيمة جتا ٢أ = جتا^{٢} أ _ جا^{٢} أ نعوض قيمة جتا أ ، جا أ وينتج

جتا ٢أ = $\left(\frac{-٤}{٥}\right)^{٢}$ _ $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$ = ...

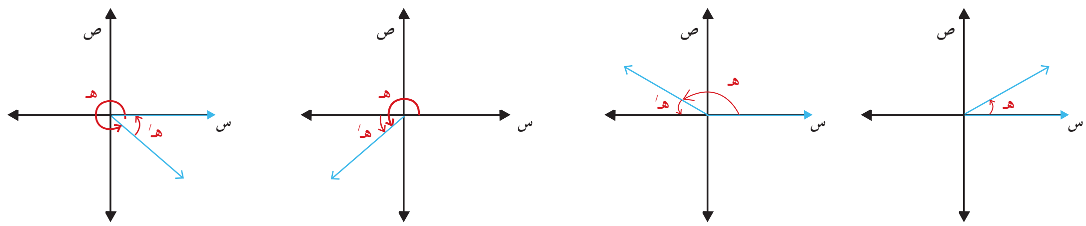
ما قيمة جتا ٤أ ؟

أفكر

أكتب علاقة مناسبة لكل من جا ٤أ ، جتا ٤أ بدلالة جا أ، جتا أ

نشاط ١٤

لكلِّ زاويةٍ قياسها هـ درجة في المستوى زاويةُ اسنادٍ قياسها هـَ درجة، أُكمل:



هـَ = هـ

هـَ = ...

هـَ = هـ − ١٨٠°

هـَ = ...

أتعلم: زاوية إسناد الزاوية (هـ): هي الزّاوية الحادّة (<هـَ) الناتجة من إتحاد ضلع انتهاء الزاوية (<هـ) ومحور السينات.

قيمُ الاقترانات المثلثيّة لزاويةِ الإسناد هي ذاتها قيمُ الاقترانات المثلثيّة للزّاوية الأساسيّة، بينما تحدّدُ إشارة تلك القيمة موضعَ ضلع انتهاء الزّاوية الاساسيّة.

نشاط ١٥

أتذكّر قيمَ الاقتراناتِ المثلثيّة للزّوايا الخاصّة، وأُكمل الجدول الآتي:

قياس الزاوية (س)	جاس	جتاس	ظاس
٣٠°	٠,٥		
٤٥°			١
٦٠°			√٣

نشاط ١٦

أوّلاً: أجد قيمة جا ١٢٠°

الحل: الزاوية في الوضع القياسي والتي قياسها ١٢٠° تقع في الربع ....

إشارة جا١٢٠° موجب.

قياس زاوية الإسناد هـ = ١٨٠° − ١٢٠° = ...

جا١٢٠° = جا٦٠° =

ثانياً: أجد قيمة جتا ٢٤٠°

الحل: الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها ٢٤٠° تقع في الربع ....

إذن: إشارة جتا ٢٤٠°.................

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

إذن: جتا٢٤٠° = - جتا.....° = ...

نشاط ١٧

أجدُ جا ٢٢٥°

الزّاوية في الوضع القياسي، التي قياسها ٢٢٥° تقع في الربع .... ، إشارة جا ٢٢٥° هي:.........

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

إذن: جا ٢٢٥° = ... = ...

- أجدُ جا -٣٠°

الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها -٣٠° تقع في الربع .... ،

إشارة جا -٣٠° هي: ......

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ...

جا -٣٠° = ... = ...

- أجد ظا $\frac{٣\pi}{٤}^{د}$

الزاوية في الوضع القياسي، التي قياسها $\frac{٣\pi}{٤}^{د}$ تقع في الربع .... ،

إشارة ظا $\frac{٣\pi}{٤}^{د}$ هي: ....

قياس زاوية الإسناد (هـَ) = ... ، إذن: ظا $\frac{٣\pi}{٤}^{د}$ = ... = ...

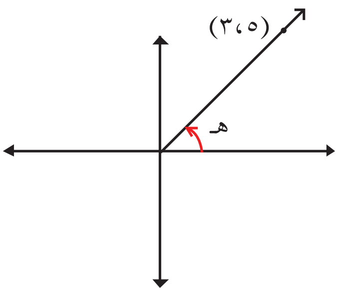
تمارين ومسائل:

(١) أجدُ قيمةَ الاقترانات المثلثية الأساسيّة لقياسات الزّوايا الآتية:

-٩٠° ، ٤٥٠° ، ٥π ^د^

(٢) أجدُ قيمةَ الاقترانات المثلثية الأساسيّة للزاوية هـ ، إذا قطع ضلعُ انتهائها دائرةَ الوحدة في النقطة:

أ ($\frac{١-}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١-}{\sqrt{٢}}$) ، ب (-١ ، ٠) ، جـ (- $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$)



(٣) ما قيمةُ جا هـ ، جتا هـ، ظا هـ في الشّكل المجاور؟

(٤) أحدّدُ إشارةَ ما يأتي:

جتا -١٣٥° ، ظا ٨٤٠° ، جتا $\frac{٢\pi}{٣}$ ^د^ ، ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ ^د^

(٥) أجد قيمة ما يلي دون استخدام الحاسبة

أ) ٢جتا^{٢} ٢٢,٥° − ١

ب) ١ − ٢ جا^{٢} $\frac{\pi}{٦}$ ^د^

جـ) ٦جا $\frac{\pi}{١٢}$ ^د^ جتا $\frac{\pi}{١٢}$ ^د^

(٦) أجدُ قياسَ زاوية الإسناد للزّوايا التي قياساتها ما يأتي:

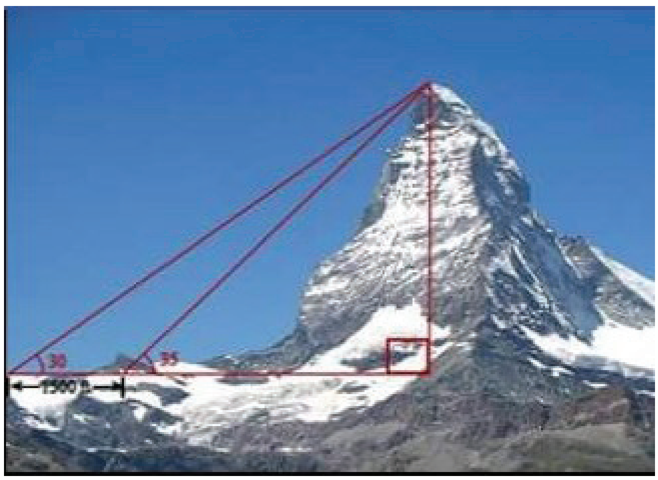
٢٢٥° ، $\frac{٢\pi}{٣}$ ^د^ ، -١٥٠° ، $\frac{٣\pi}{٤}$ ^د^ ، ٢١٠°

(٧) أجدُ قيمة ما يأتي، دون استخدام الآلة الحاسبة:

جا ٣٣٠°، ، جا -٣٠٠°

(٨) أ زاوية منعكسة بحيث جاأ = - $\frac{٥}{١٣}$ ، أجد قيمة جتا٢أ ، جا٢أ ، جتا٤أ .

(٩) لإيجاد ارتفاع قمة جبل قام مجموعة من الطلبة بقياس زاوية ارتفاعها من نقطة معينة على سطح الأرض فكانت ٣٠°، سار الطلاب مسافة أفقية باتجاه الجبل مقدارها (١٥٠٠) قدم ثم قاموا بقياس زاوية ارتفاع قمته مرة ثانية فكانت ٣٥° كما هو موضح بالشكل. أجدُ ارتفاع قمة الجبل



(٤ - ٤) تمثيل الاقترانات المثلثية بيانياً
Graphing Trigonometric Functions

نشاط ١

طريق وادي النار هي الرئةُ التي يتنفّس بها أهالي جنوب الضّفة الغربيّة، والتي تصل بين شمالها وجنوبها. حيث إنّ قوات الاحتلال ترفضُ تزويدَها بالكهرباء، فقد بادر مجموعةٌ من طلبة الجامعات الفلسطينيّة إلى تصميم خلايا شمسيّة تقوم بتحويل الطاقة الشمسيّة إلى طاقةٍ كهربائيّة مستمرة، يتمّ تحويلُها إلى تيارٍ متردّدٍ، تتغيّر قيمتُه مع الزّمن، الذي يمكن استخدامُه في إنارة المنطقة ليلاً.

ويمكن التعبير عن تغير التيار بالنسبة للزمن (ز) بالثانية بالعلاقة ت(ز) = أ جا $\frac{٢\pi}{هـ}$ ز

حيث أ هي أقصى حدّ للتيار بالأمبير، هـ هي الزمن الدوري للتيار بالثانية.

إذا كانت العلاقة التي تربط التيار الكهربائي مع الزمن، ت(ز) = ٢جا (١٠πز)، فإنّ الزمن الدوري للتيار = $\frac{٢\pi}{هـ}$ = ١٠π، أقصى حدٍّ للتيار المسموح = ...، هـ = ...

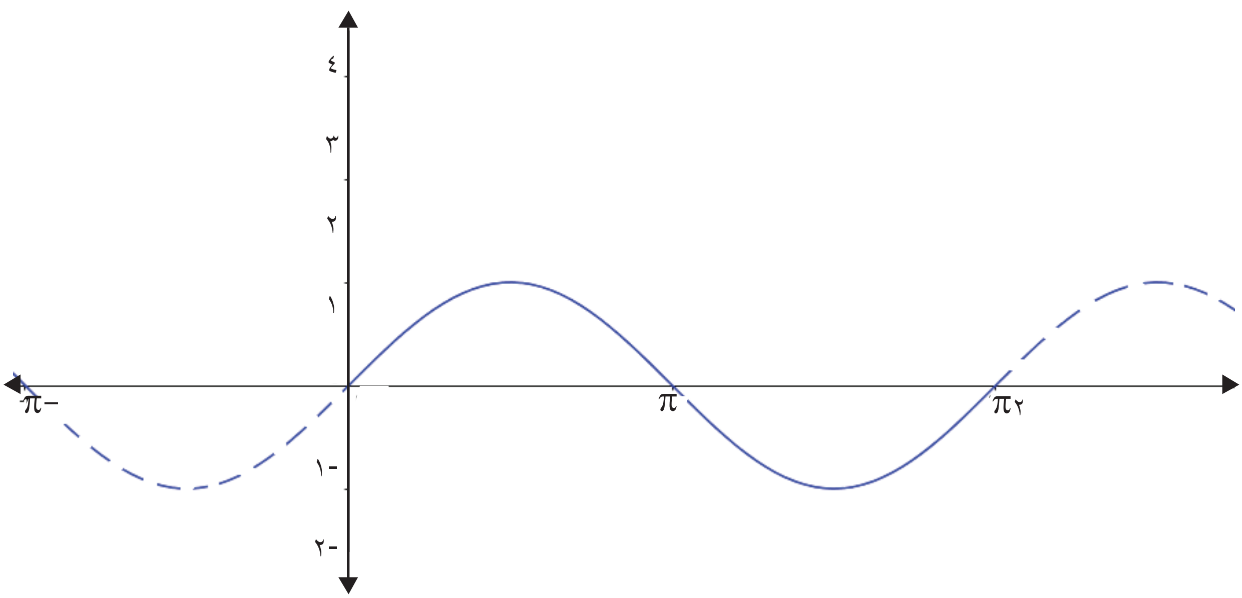
- قيمة التيار عند ز = ٠,١ ث تساوي: ت(٠,١) = ٢جا(١٠π × ٠,١) = ... أمبير
- قيمة التيار عند ز= ٠,٠٥ ث تساوي ....

نشاط ٢

أُمثّلُ الاقتران ق(س)= جاس في المستوى الديكارتي، أكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	π-	$\frac{\pi}{٢}$-	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق(س)= جا س		١-	...	...	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	...	١	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	...	...	١-	...	...

أُعيّنُ النّقاط من الجدول، وأرسمُ منحنى الاقتران:



أُلاحظ شكل المنحنى، وأستنتج خصائصه.

- بما أنّ الزّوايا المتكافئة لها النسبُ المثلثيّةُ المناظرة نفسها، فإنّ منحنى ق(س) =جا س يكرّرُ نفسه في فتراتٍ متساوية، طولُ كلٍّ منها ٢π. ومثل هذه الاقترانات تُسمّى اقتراناتٍ دوريّةً، ومقدار دورة هذا الاقتران = ٢π
- مجال الاقتران ق(س) =جا س هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة ح، ومداه هو [-١، ١]
- أكبرُ قيمةٍ للاقتران = ... وأصغر قيمةٍ له = ...

- مثل هذه الاقترانات لها سعةٌ، وتُعرف سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له} - \text{أصغر قيمة له}}{٢}$

وعليه فإنّ: سعة الاقتران ق(س) = جا س = $\frac{١ - {}^{-}١}{٢}$ = ١

- منحنى ق(س)= جا س متماثل حول نقطة الأصل؛ لذلك فهو اقتران ....

نشاط ٣

أُمثّل الاقتران: ق(س) = جتاس في المستوى الديكارتي، س $\in$ ح .
أُكمل الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق(س)= جتا س	-١	...	...	...	...	...	٠	$-\frac{١}{٢}$	-١	...	...	...	

أُعيّن النقاط من الجدول، وأرسمُ منحنى الاقتران.

ألاحظُ شكل المنحنى، وأستنتج خصائصه:

- مجال الاقتران ق(س) = جتا س هو ....، ومداه ....
- أكبر قيمةٍ للاقتران = ...، وأصغر قيمةٍ له = ...
- الاقتران ق (س) = جتا س اقتران دوري، دورته = ...
- سعة الاقتران = $\frac{\text{أكبر قيمة له} - \text{أصغر قيمة له}}{٢}$ = ...
- ق(س)= جتاس اقتران زوجيّ؛ لأنّ منحناه متماثل حول محور ....

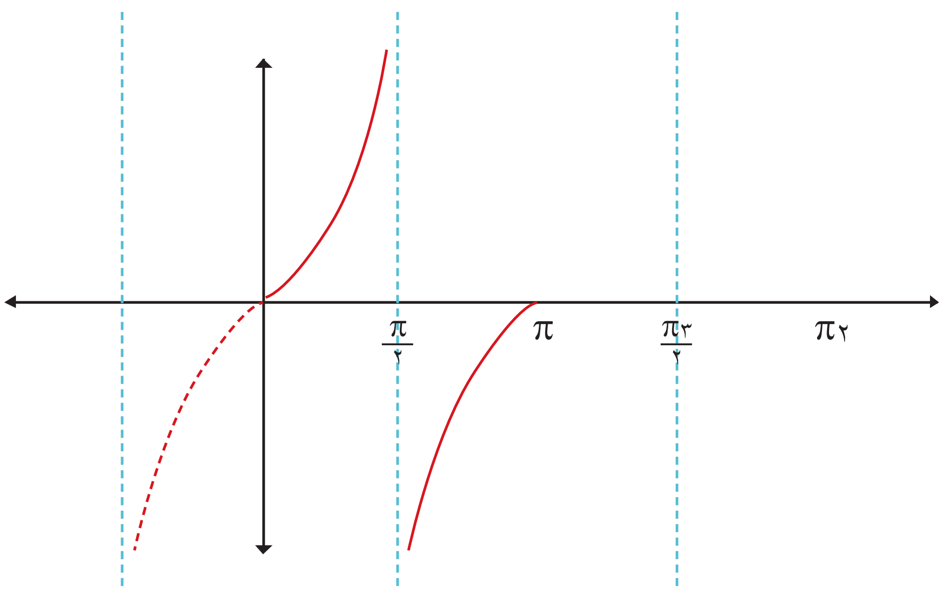
نشاط ٤

أمثل الاقتران ق(س) = ظا س في المستوى الديكارتي.

أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	$-\frac{\pi}{٢}$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٤\pi}{٣}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ق (س) = ظا س	...	...	صفر	...	١	...	...	...	...	$\sqrt{٣}$	...	$-\frac{١}{\sqrt{٣}}$	...

أُعيّنُ النّقاط من الجدول، وأُكملُ رسم منحنى الاقتران.



ألاحظ شكل المنحنى، وأُدوّن خصائصه:

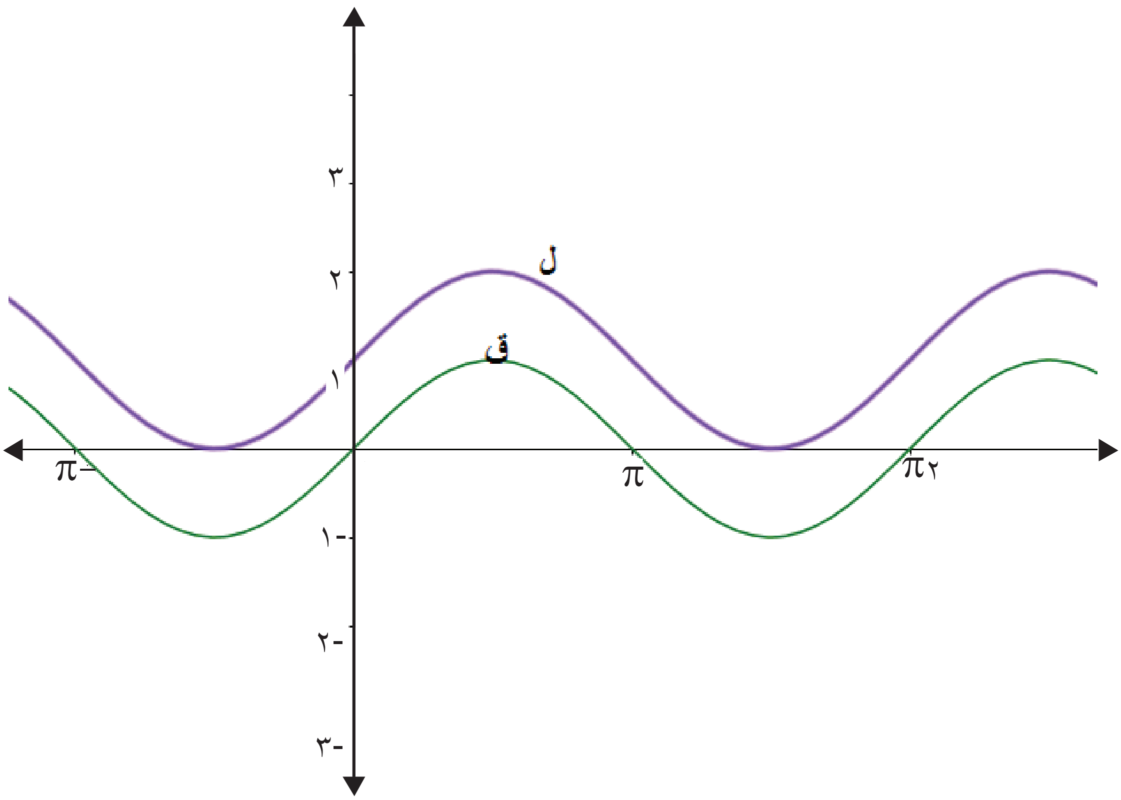
مجال ق(س) = ظاس هو مجموعةُ جميع الأعداد الحقيقيّة، ما عدا ....، ومداه هو: ح

دورته = ...

ق(س) = ظاس اقترانٌ فرديٌّ، أوضّحُ ذلك.

نشاط ٥

اعتماداً على منحنى الاقتران ق(س)= جا س، ومنحنى الاقتران ل (س) = جا س + ١



أُلاحظ أنّ: منحنى الاقتران ل(س) هو انسحاب لمنحنى الاقتران ق(س) بمقدار ...... إلى ......

سعة الاقتران ....، دورته ....

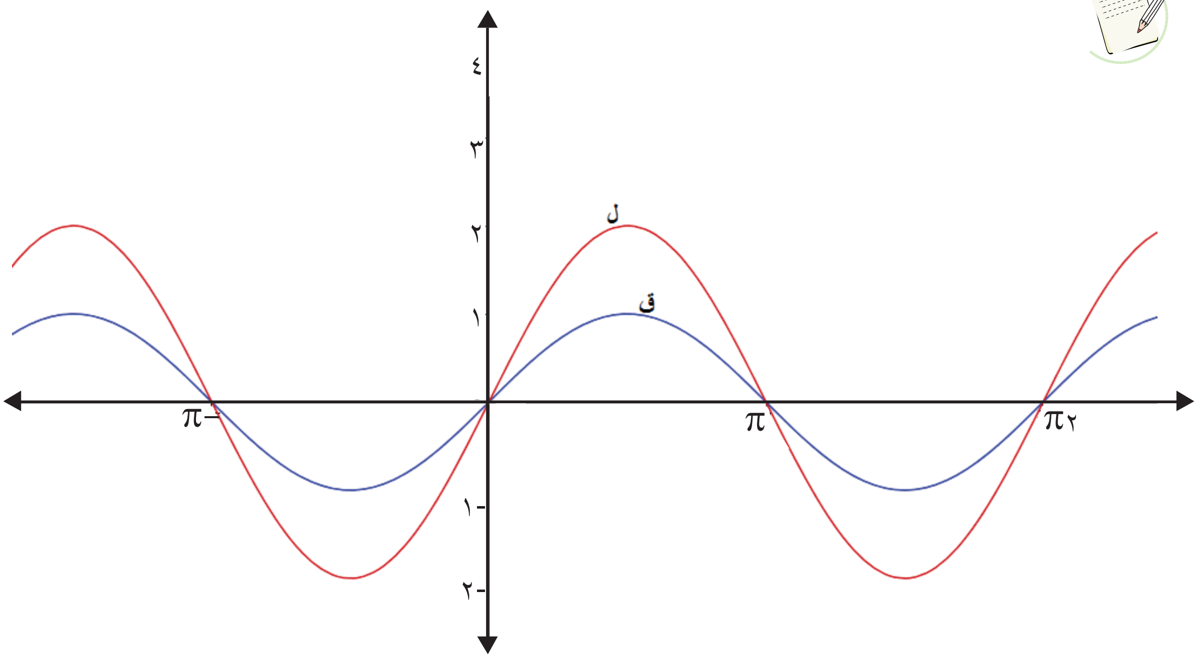
ومداه ....

باستخدام التحويلات الهندسيّة أرسمُ منحنيات الاقترانات الدورية الآتية:

أ) ق(س) = جاس ـ ١ ب) ق(س) = -جاس جـ) ق(س) = جا(-س).

نشاط ٦

اعتماداً على منحنى الاقتران ق(س) = جا س، أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = ٢جا س، ثم أجدُ دورته وسعته.



من الرسم: دورة الاقتران ل = ...

القيمة العظمى هي ٢، والقيمة الصغرى هي: ....

السعة = ...

مدى الاقتران هو: ....

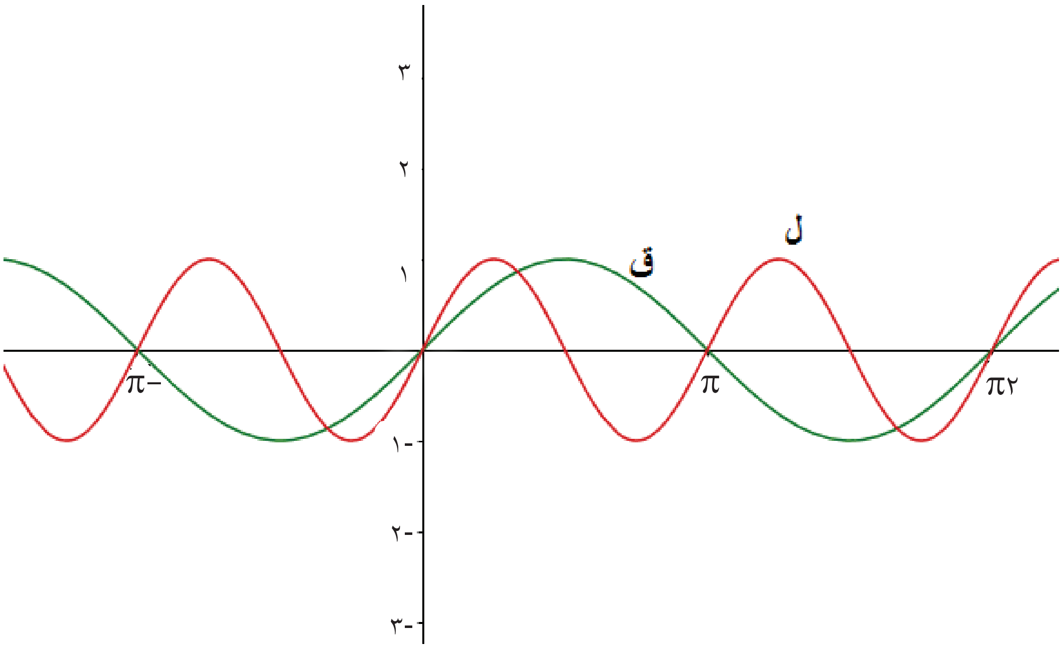
نشاط ٧

أُمثّلُ منحنى الاقتران ق(س) = حاس، ل(س) = جا٢س على المستوى البياني نفسه، ثم أجدُ السّعة والدورة لِلاقتران ل(س).

أُكملُ الجدول الآتي:

قياس الزاوية س	$-\pi$	صفر	$\frac{\pi}{٦}$	$\frac{\pi}{٤}$	$\frac{\pi}{٣}$	$\frac{\pi}{٢}$	$\frac{٢\pi}{٣}$	π	$\frac{٥\pi}{٤}$	$\frac{٣\pi}{٢}$	$\frac{١١\pi}{٦}$	٢π
ل (س)= جا٢س	...	صفر	...	...	...	...	$-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	...	١	...	...	...

أُعيّنُ النّقاط في المستوى الديكارتي، وأُلاحظُ التمثيل البياني للمنحنى:



من التمثيل البياني لمنحنى ل(س)، ألاحظُ أنّ دورة الاقتران ل(س) هي: ....

بينما سعته =.........................

مدى الاقتران ل =.........................

أستنتج: الاقتران الدوري ق(س) = ٲ جا (ب س) + جـ ، او الاقتران هـ(س) = ٲجتا (ب س) + جـ

حيث: ٲ ، ب ، جـ أعداد حقيقيّة ، ٲ ، ب ≠ ٠ .

فتكون: دورة الاقتران = $\frac{٢\pi}{|ب|}$

سعة الاقتران = | ٲ |

مدى الاقتران = [- | ٲ | + جـ ، | ٲ | + جـ]

نشاط ٨

لديك الاقتران ق(س) = ٢ جتا $\frac{س}{٢}$ − ٣، أجدُ دورته، سعته، ومداه، دون تمثيله بيانيّاً.

دورة الاقتران = $\frac{٢\pi}{|ب|}$ = ...

سعة الاقتران = ...

مجال الاقتران = ...

مدى الاقتران = ...

تمارين ومسائل:

(١) أُمثّلُ منحنيات الاقترانات المثلثية الآتية:

- ق(س) = جا س + ٢
- ل(س) = جتا ٢س ـ ١
- م(س) = جتا (-س)
- ع(س) = ظاس + ١
- ك(س) = جا (س + π)

(٢) أجدُ: أكبرَ قيمة وأصغرَ قيمة (إن وجدت)، السعة، الدورة لكلٍّ من الاقترانات الواردة في السؤال الأوّل.

(٣) أجدُ: دورة، وسعة، ومدى الاقتران: ق(س) = -٣ جتا ($\frac{\text{س}}{٢}$)، دون تمثيله بيانيّاً.

(٤) أ) أرسم منحنى الاقتران ق(س) = جتاس، وعلى المستوى الديكارتي نفسه أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = جا (س + $\frac{\pi}{٢}$)، ماذا تلاحظ؟

ب) أرسمُ منحنى الاقتران ق(س) = جاس، وعلى المستوى الديكارتي نفسه أرسمُ منحنى الاقتران ل (س) = جتا (س − $\frac{\pi}{٢}$)، ماذا تلاحظ؟

(٥) يتحرك سطح البحر بين ارتفاع وانخفاض مرة كل نصف يوم تقريباً، وتعرف هذه الظاهرة بالمد والجزر وتنشأ عن قوى جذب القمر والشمس. إذا كان أقصى ارتفاع للماء هو ٢٠م، وأقل انخفاض هو ١٠م، وكان تغير ارتفاع الماء خلال ساعات اليوم يأخذ شكل اقتران الجيب. أكتب قاعدة الاقتران التي تعبر عن مستوى ارتفاع وانخفاض مستوى الماء مع الزمن، وأُمثله بيانيّاً.

(٤ - ٥) المتطابقات والمعادلات المثلثيّة (Trigonometric Identities and Equations)

نشاط ١

شارك في سباق فِلَسطينَ الوطنيّ حوالي ٦٠٠٠ متسابقٍ، من دول العالم كافّةً؛ حيث اشتمل السباق على رسائل وطنيّة عدّة، أهمّها التركيز على الواقع الفلسطينيّ بمنع حريّةِ الحركة، وإقامة جدار الضم والتوسع بين محافظات الوطن، الذي تبعه ممارساتٌ عديدة تنافي المواثيق الدّوْليّة لحقوق الإنسان.

عندما يكون المتسابقُ ضمنَ مسارٍ مُنحنٍ عليه أنْ يحافظ على اتّزانه، وذلك بالميل بزاوية قياسها = هـ؛ بحيث تكون العلاقة: ظا هـ = $\frac{\text{س}^{2}}{\text{جـ ر}}$ ، حيث: س: سرعة المتسابق تلك اللحظة، جـ: تسارُع الجاذبيّة الأرضيّة = ٩,٨م/ث^{2}، ر: نصف قطر المسار الدائري.

ويمكن كتابةُ تلك العلاقة بالصّورة: جاهـ = $\frac{\text{س}^{2}}{\text{جـ ر}}$ جتا هـ

- أبيّنُ أنّ الصورة الأولى للعلاقة تكافئ الصورة الثانية لها.
- زاوية ميل لاعب يجري بسرعة ٢٠م/ث في مسار دائري نصف قطره = ٤٠م، هي ....

نشاط ٢

أرسمُ المستوى الديكارتي

- أرسمُ دائرةً، مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها وحدة واحدة (دائرة الوحدة).
- أرسم زاويةً، قياسها هـ في الوضع القياسي.
- أعيّنُ نقطة تقاطع ضلع انتهاء الزاوية هـ مع الدائرة: ب (س ، ص)
- جا هـ = ... ، جتا هـ = ...،
- ب (س ، ص) = ب (...... ، ....)

معادلة دائرة الوحدة س^{٢} + ص^{٢} =١، النقطة ب تقع على الدائرة، إذن: تحقّقُ معادلتها وينتج أنّ:
جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١، مثل هذه العلاقة صحيحة لأيّة زاوية هـ، وتُسمّى متطابقة.
جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١

أتعلّم: المتطابقة المثلثيّة هي معادلة بمتغير تحتوي اقتراناً مثلثياً، وتكون صائبة لجميع قيم المتغيّر.

أستنتج أنّ: جا^{٢} هـ = ١ – جتا^{٢} هـ ، جتا^{٢} هـ = ١ – جا^{٢} هـ ، وضّح ذلك.

نشاط ٣

زاويةٌ قياسها س درجة بحيث جا س = $\frac{٣}{٥}$ ، أجدُ جتا س، ظا س.

- جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١
- $(\frac{٣}{٥})^{٢}$ + جتا^{٢} س = ١
- جتا^{٢} س = ١ – .... = ... ،
- جتا س = ...
- ظا س = ...

نشاط ٤

باستخدام المتطابقة جا^{٢} هـ + جتا^{٢} هـ = ١، أثبت أنّ:

- ظا^{٢}هـ + ١ = قا^{٢}هـ صحيحة لأيّة زاوية.

نقسم طرفيّ المتطابقة على جتا^{٢}هـ.

وينتج أنّ: .... ، حيث إنّ جتاهـ $\neq$ ٠

- ظتا^{٢}هـ + ١ = قتا^{٢}هـ صحيحة لأيّة زاوية.
- نقسم طرفيّ المتطابقة المعطاة على .... وينتج أنّ: ....

.... ، حيث إنّ جا هـ $\neq$ ٠

نشاط ٥

أثبتُ صحّة المتطابقة $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{١ − جتا س}}$ = ١ + جتا س ، جتا س $\neq$ ١

الطرف الأيمن = ...

أضربُ البسط والمقام في (١ + جتا س)

أستبدل (١ − جتا^{٢} س) بـ جا^{٢} س

أختصرُ البسط والمقام بالقسمة على جا^{٢} س

أقارنُ النتيجةَ بالطرف الأيسر من المتطابقة الأصليّة.

نشاط ٦

أثبتُ صحّة المتطابقة: جتا^{٢}هـ − جا^{٢}هـ = ١ − ٢جا^{٢}هـ

الطرف الأيمن: من المتطابقة جا^{٢} س + جتا^{٢} س = ١، ينتج أنّ: جتا^{٢} هـ = ١ − جا^{٢} هـ

(١ − جا^{٢} هـ) − جا^{٢} هـ = ... = الطرف الأيسر / وهو المطلوب.

نشاط ٧

أثبت أنّ: $\frac{\text{١ + ظا}^{٢}\text{هـ}}{\text{١ + ظتا}^{٢}\text{هـ}}$ = ظا^{٢}هـ

الطرف الأيمن: $\frac{\text{١ + ظا}^{٢}\text{هـ}}{\text{١ + ظتا}^{٢}\text{هـ}}$ = $\frac{\text{قا}^{٢}\text{هـ}}{\text{قتا}^{٢}\text{هـ}}$ = ...

ملاحظـة: لإثبات صحّة المتطابقة، يمكن البدءُ بأحد الطرفيْن، والوصول إلى الطرف الآخر، ويمكن البدءُ بكلا الطرفين، والوصول إلى مقداريْن متساوييْن.

نشاط ٨

أجدُ قيمة الصواب للجملة المفتوحة: ٢ جا س – ١ = صفر، عندما س = ٠ ، $\frac{\pi}{٦}$

نعوّض س = ٠ في الجملة المفتوحة ٢ جا ٠ – ١ = -١ ≠ ٠ إذن: خاطئة.

نعوّض س = $\frac{\pi}{٦}$ في الجملة المفتوحة ٢ جا $\frac{\pi}{٦}$ – ١ = ٠ إذن: صائبة.

تسمى الجملة المفتوحة التي تحتوي اقتراناً مثلثياً وتكون صائبة لبعض القيم الحقيقية معادلة مثلثية.

أتذكّر: إذا كان س ، ص قياسيْن لزاويتيْن متتامتيْن فإنّ: جاس = جتا ص.

نشاط ٩

أحلّ المعادلة المثلثيّة: جا (٢س + ٣٠) = جتا ٤س ، صفر ≤ س ≤ ٩٠°.

٢س + ٣٠ + ٤س = ...

٦س = ...، إذن س = ...°

مثال(١): حلّ المعادلة ٢ جا س – ١ = صفر ، صفر ≤ س ≤ ٢ π

- ٢ جا س – ١ = صفر ⟵ ٢ جا س = ١ ⟵ جا س = $\frac{١}{٢}$
- إذن: زاوية الإسناد = ٣٠°
- بما أنّ: جاس قيمة موجبة ⟵ تقع الزاوية في الربع الأوّل (س = ٣٠°) ،

أو تقع في الربع الثاني (س = ١٨٠° – ٣٠° = ١٥٠°)

مجموعة الحل = {$\frac{\pi}{٦}$ ، $\frac{٥\pi}{٦}$}

نشاط ١٠

أجدُ مجموعة حلّ المعادلة:

جتا^{٢}س + ٢جتاس − ٣ = صفر ، صفر ≤ س ≤ ٢π

جتا^{٢}س + ٢جتاس − ٣ = صفر

(جتاس +....) (جتا س − .....) = صفر

إذن: جتا س + ٣ = صفر ⟵ جتا س = -٣ (تُرفض)، لماذا ؟

أو جتا س = ... ⟵ س = ... أو س = ... ⟵ مجموعة الحلّ = ...

نشاط ١١

أجدُ مجموعةَ حلّ المعادلة:

جا س جتا س − $\frac{١}{٢}$ جا س = صفر ، صفر ≤ س ≤ ٢π

جا س جتا س − $\frac{١}{٢}$ جا س = صفر ، ⟵ (جا س) (... − ...) = صفر

إذن: جا س = صفر، س زاوية ربعية، ⟵ س = صفر، ⟵ أو س =.... ، أو س = ...

جتاس − $\frac{١}{٢}$ = صفر ، جتا س = ...، زاوية الإسناد = ...

جتا س قيمة موجبة ⟵ تقع الزاوية في الربع ....، أو الربع ......

إذن: س = ...، أو س = ...

مجموعة الحل= ....

تمارين ومسائل:

(١) أثبتْ صحّةَ المتطابقات الآتية:

أ) $(\text{جا س} + \text{جتا س})^{٢} = ١ + \text{جا٢س}$

ب) $\frac{\text{١ــ جتاس}}{\text{١ + جتاس}} = \left(\frac{\text{١ ــ جتاس}}{\text{جا س}}\right)^{٢}$

جـ) $\frac{\text{١ــ جتا٢هـ}}{\text{١ + جتا٢هـ}} = \text{ظا}^{٢}\text{هـ}$

(٢) ما مجموعة حلّ كل من المعادلات الآتية، حيث: صفر $\leq$ س $\leq$ ٢ π ؟

أ) ٢ جتا^{٢} س ــ ١ = صفر

ب) ٢ جا^{٢} س + جا س = صفر

جـ) ظا^{٢} س + ١ = ٢

(٣) عُلِّق جسم في نهاية زنبرك يهتز فوق سطح منضدة، إذا كان ارتفاع الجسم عن سطح المنضدة يُعطى بالعلاقة ع = ٢٠ − ٤جتا ٢ π ﻦ ، حيث ﻦ الزمن بالثواني، ع الارتفاع بالسنتيمتر.

متى يكون ارتفاع الجسم = ١٦ سم ؟

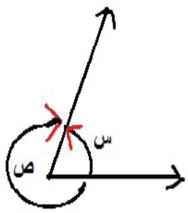
بعد كم ثانية يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع ؟

(٤ - ٦) تمارين عامّة

السؤال الأوّل:

أضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

(١) ما قيم س ، ص الممكنة في الشكل المجاور؟



أ) (٦٠° ، ٣٠٠°) ب) (٦٠°،- ٣٠٠°) جـ) (-٦٠°، ٣٠٠°) د) (-٦٠°، -٣٠٠°)

(٢) أي القياسات الآتية قياسٌ لزاوية ربعيّة ؟

أ) ١٢٠° ب) ١٩٠° جـ) ٣٠٠° د) ٣٦٠°

(٣) أي القياسات الآتية قياسٌ لزاويةٍ مكافئةٍ للزاوية التي قياسها ١٣٥° ؟

أ) -٢٢٥° ب) ٢٢٥° جـ) -١٣٥° د) ٤٥°

(٤) ما قياس زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها ٢٠٠°:

أ) ١٦٠° ب) -٦٠° جـ) ٢٠° د) -٢٠°

(٥) زاوية قياسها $(\frac{٣\pi}{٥})^{د}$ ، ما قيمة قياسها بالدرجات؟

أ) ٢١٦° ب) ٥٤° جـ) ١٠٨° د) ٣٤,٤°

(٦) زاوية قياسها ٣١٥°، ما قياسها بالراديان؟

أ) $\frac{٧\pi}{٨}$ ب) $\frac{٧\pi}{٤}$ جـ) $\frac{٣١٥\pi}{٣٦٠}$ د) $\frac{٤\pi}{٧}$

(٧) إذا كان ظاس= $\frac{٦}{٨}$ ، فما قيمةُ جا س ؟

أ) ٦ ب) $\frac{٣}{٥}$ جـ) $\frac{٨}{١٠}$ د) ٨

(٨) ما سعة الاقتران: ق(س) = ٢جتا ٣س − ١ ؟

أ) ٢ ب) ٣ جـ) -١ د) ١

(٩) ما دورة الاقتران: ل(س) = ٣جا ٢س + ١ ؟

أ) π٢ ب) π جـ) $(\frac{٢}{٣})\pi$ د) $(\frac{٣}{٢})\pi$

السؤال الثاني:

ما قيمة ما يأتي:

أ) جا -٢٤٠° ب) جتا - $\frac{٧\pi}{٤}$ جـ) ظا ٣٣٠° د) جا ٤٠٥° ؟

السؤال الثالث:

أُبيِّنْ خطأً كلٍّ من العبارات الآتية:

أ) جتا (س + ص) = جتا س + جتا ص

ب) جا ٢س = ٢ جاس

جـ) ظا $\frac{٢}{٣}$ س = $\frac{\text{ظا ٢س}}{٣}$

السؤال الرابع:

أثبتْ صحّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

أ) جا س + جتا س = $\frac{\text{٢جا}^{٢}\text{س} - ١}{\text{جا س} - \text{جتا س}}$

ب) جتا^{٢} س + (ظاس جتاس)^{٢} = ١

السؤال الخامس:

أرسمُ منحنى كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س)= ٣جا ($\frac{٢}{٣}$ س)

ب) هـ(س)= ٢ – جتا (-س)

جـ) ل(س)= ظاس – ١

د) ك(س)= جتا (س – $\frac{\pi}{٢}$)

فكرةٌ رياديّة:

تستطيع السفينة الدخول الى الميناء فقط إذا كان مستوى المياه لا يقل عن ٨م نتيجة حركة المد والجزر. تُحْدِث حركة المد والجزر تغيراً يومياً على مستوى ارتفاع الماء حسب العلاقة:

ع = ٥جا ($\frac{\pi}{٦}$ س) + ٨ ، حيث س هي المدة الزمنية المنقضية بعد منتصف الليل بالساعات، ع ارتفاع الماء بالأمتار.

أ) كم مرة يبلغ فيها عمق المياه في الميناء ٨م تماماً في اليوم ؟

ب) أرسم مخططاً يبين كيف يتغير ارتفاع الماء خلال اليوم، ثم أقدّر عدد الساعات في اليوم التي تستطيع السفينة الدخول الى الميناء. ما هو أقصى ارتفاع وانخفاض للماء خلال اليوم ؟

جـ) أناقش المخاطر التي تتعرض لها البضائع إذا اعتمد الميناء تفريغ الحمولة الساعة ١٢ ليلاً كل يوم.

الوحدة الخامسة ٥

الهندسة
Geometry

تأسّس استاد الحسين بن علي الدّوْليّ/ الخليل عام ٢٠٠٩م ، وتم افتتاحُه بإجراء مباراةٍ بين المنتخب الأولمبي الفلسطينيّ، ونظيره الأردني في إحدى ليالي رمضان. ويُعدُّ ثالثَ استاد على مستوى فلسطين.

أُخذت هذه الصّور أثناء إنشاء المِظلّة عام ٢٠١٢م، ما الأشكال الهندسيّة الموجودة في الشكل؟ وكيف تمّ تصميمُها لتقاوم السقوط، وتحافظ على سلامة المواطنين؟

الهندسة من فروع الرياضيات الأساسيّة، وتلعب دوراً رئيساً في العلوم التطبيقية والتكنولوجية، في نهاية الوَحْدَة الطلبة قادرون على توظيف الإنشاءات الهندسية، ونظريات التكافؤ في فهم العالم من حولهم وإدراك جماله من خلال تحقيق الأهداف الآتية:

- القيام بالإنشاءات الهندسيّة الآتية:

- تنصيف قطعةٍ مستقيمةٍ، وتنصيف زاوية.
- رسم مستقيم موازٍ لمستقيم آخر.
- تمثيل العمليات الحسابية بالإنشاءات الهندسية.
- إقامة عمودٍ على مستقيمٍ من نقطةٍ واقعةٍ عليه.
- إنزال عمودٍ على مستقيم من نقطةٍ خارجةٍ عنه.
- رسم المضلّعات المنتظمة.

- التعرُّف إلى نظريّات تكافؤ الأشكال الهندسيّة.

(٥ - ١) إنشاءات هندسيّة (١)
Geometric Constructions (1)

نشاط ١

الهندسة الإنشائيّة إحدى تخصّصات الهندسة المدنيّة التي تُدرَّسُ في جامعاتنا الفلسطينيّة والتي تهتمّ بدراسة المنشآت التي تدعمُ وتقاومُ الأحمال. وقد اتّسعت الهندسة الإنشائيّة لِتشملَ هندسةَ الجسور والأبنية، والهياكل (السيارات، الطائرات). الشكل المجاور يبيّن أحد التصاميم الهندسيّة.

أكتبُ أربعة أشكالٍ هندسيّةٍ في الشكل: مستطيل، .... ، .... ، ....

الأدوات التي استُخدِمتْ في رسم هذه الأشكال الهندسيّة: ....

الإنشاء الهندسيّ: هو رسم الأشكال والزّوايا بدقّةٍ، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار فقط.

أتعلّم: يُمكن إثباتُ أيِّ إنشاءٍ هندسيّ بأدلةٍ وبراهينَ رياضيّة.

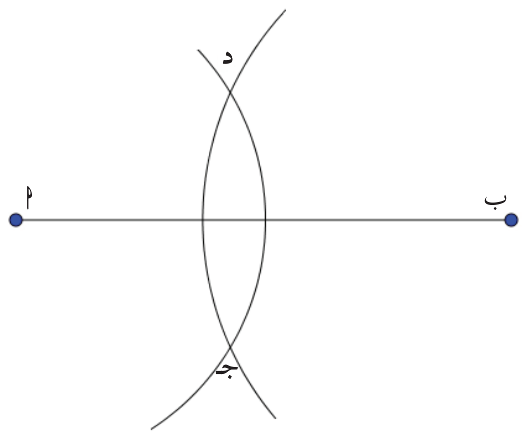
ألاحظُ أنّ: جميع الأشكال في النشاط السابق هي خطوطٌ مستقيمةٌ، أو دوائر، أو جزء منهما.

أفكر

لماذا تُستخدَمُ الحافة المستقيمة والفرجارُ فقط في الإنشاءات الهندسيّة ؟

نشاط ٢

تنصيف قطعةٍ مستقيمة



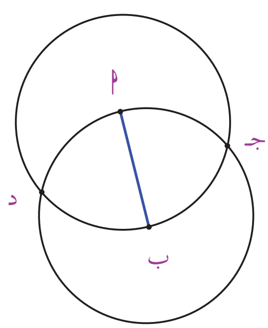
- أفتحُ الفرجارَ فتحةً مناسبة (أكبر من نصف طول $\overline{\text{م ب}}$)، لماذا؟
- أُثبّتُ الفرجار في النقطة م، وأرسم دائرة (أو جزءاً من دائرة يقطع القطعة المستقيمة).
- بالفتحة نفسها أُثبّت الفرجار في النقطة ب، وأرسم دائرةً أخرى تتقاطع مع الدائرة الأولى.
- أحدّدُ نقاط تقاطع الدائرتيْن، وأُسمّيهما جـ ، د ، وأصلُ بينهما.
- نقطة تقاطع المستقيم جـ د مع القطعة المستقيمة $\overline{\text{م ب}}$ هي نقطة المنتصف ولتكنْ م. لإثبات أنّ النقطة م هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{\text{م ب}}$ هندسيّاً، أصل بين النقاط م، جـ، ب، د.
- الشكل الناتج هو: ....

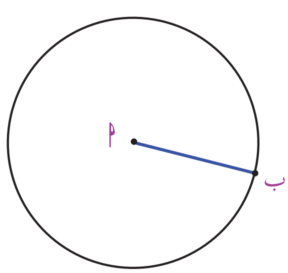
العلاقة بين أقطاره: .... و ....

أستنتج: أنّ النقطة م هي: ....

نشاط ٣

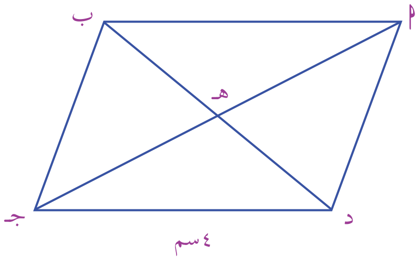
الشكلان المجاوران يبيّنان جزءاً من تنصيف قطعتيْن مستقيمتيْن، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار أكمل الرسم؛ لتُحدّدَ نقطة المنتصف.





نشاط ٤

أجدُ محيطَ المثلث جـ ب هـ في متوازي الأضلاع المجاور، إذا علمت أنّ ب د = ٤سم.



هـ أ = ٣سم   أ د = ٣ سم

ب هـ = ... ؛ لأنّ هـ هي نقطة منتصف القطعة

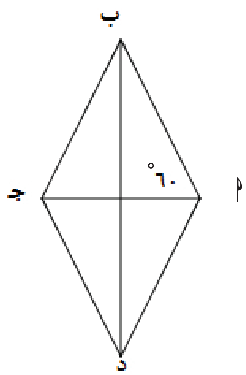
....

محيط المثلث = ...

أفكر

هل يمكن تقسيم قطعةٍ مستقيمةٍ إلى ٤ أجزاء متساوية ؟
هل يمكنُ تقسيمُ قطعةٍ مستقيمةٍ إلى ٥ أو ٦ أجزاء متساويةٍ بالطريقة نفسها ؟

نشاط ٥



الشكل المجاور هو معيّن.

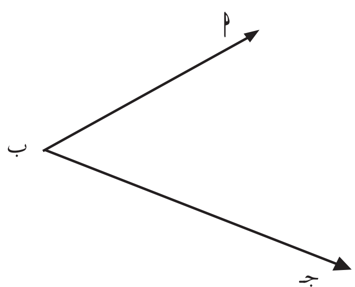
∠ أ ب جـ = ...

∠ أ ب د = ...

قطر المعين $\overline{\text{د ب}}$ ينصف زاوية ....

نشاط ٦

تنصيف زاوية:



- أُسمّي الزّاوية في الشّكل المجاور: ....
- عناصرها: ....،.......................،

....

.............، ....، ....

أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبةً، وأثبّت رأس الفرجار عند رأس الزاوية ب، وأرسم قوساً يقطع ضلعيّ الزاوية في النقطتين س ، ص على التوالي.

أثبّتُ الفرجار عند النقطة س، وأرسم قوساً بفتحة مناسبة.

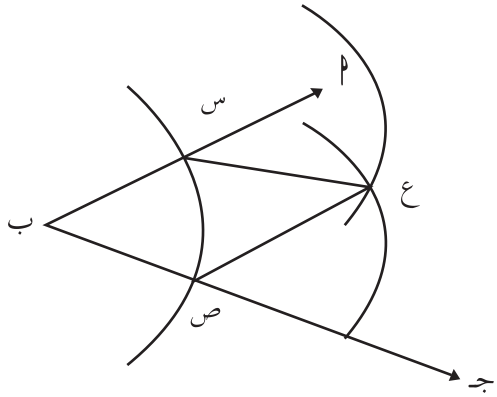
أثبّت الفرجار عند النقطة ص، وبالفتحة نفسها أرسم قوساً آخر، يقطع القوس الأوّل في النقطة ع.

فيكون $\overleftrightarrow{\text{ب ع}}$ منصّف الزاوية.

للتحقّق هندسيّاً أنّ المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب ع}}$ هو منصّف

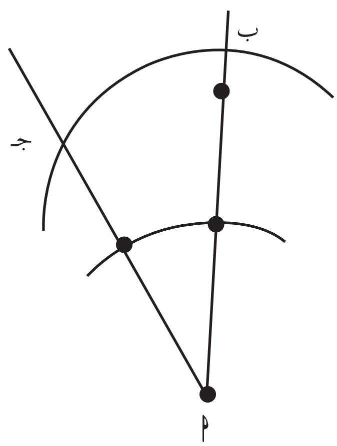
للزّاوية س ب ص:

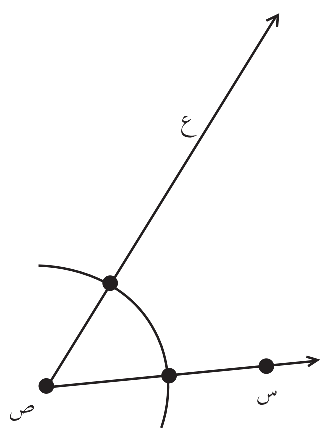
من تطابق المثلث ب س ع ، والمثلث ب ص ع فيهما:



نشاط ٧

أكملُ الرسم لأنصّفَ الزّاوية المرسومة في كلّ شكل:

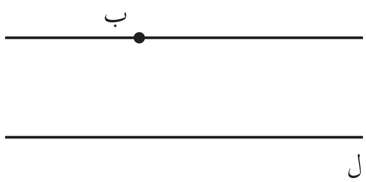




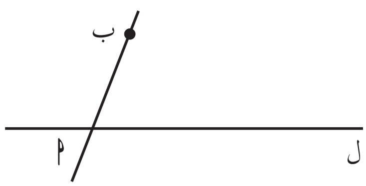
أفكر

هل يمكن تثليث زاوية ما (تقسيمها إلى ثلاث زوايا متساويةٍ في القياس)؟ أبحث في ذلك.

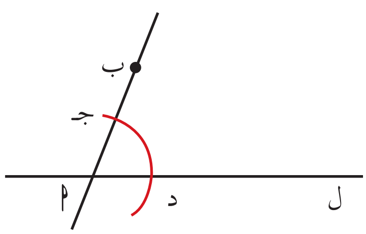
مثال: رسم مستقيم موازٍ لآخر من نقطةٍ معلومة.



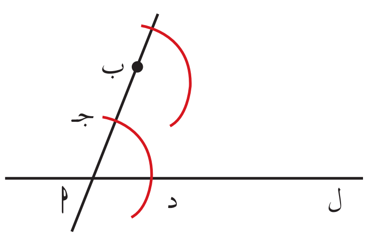
- أرسمُ مستقيماً موازياً للمستقيم ل، ويمرُّ بالنقطة ب:



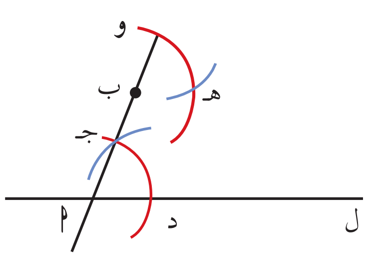
- أرسم من النقطة ب أيّ مستقيم، يقطع المستقيم ل في النقطة أ.



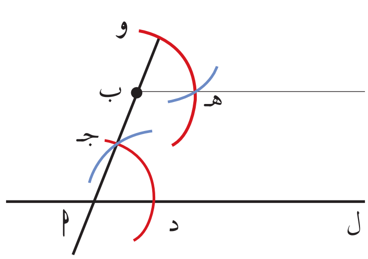
- أفتحُ الفرجارَ فتحةً مناسبةً (أقلّ من أ ب)، وأرسمُ قوساً من دائرة مركزُها أ ويقطع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في النقطة جـ ، والمستقيم ل في النقطة د.



- أُثبّتُ الفرجار في النقطة ب، وبالفتحة نفسها أرسمُ قوساً آخر يقطع المستقيم $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ في النقطة و.



- أفتحُ الفرجار فتحةً تساوي جـ د، وأرسمُ قوساً من دائرة مركزها و يقطع القوس السابق في النقطة هـ.



- المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ يوازي المستقيم ل.

ألاحظ: من التوازي ينتج أنّ $\measuredangle$ د ٲ جـ = $\measuredangle$ هـ ب و بالتناظر، ويُسمّى هذا الإنشاء نقلَ زاويةٍ معلومة.

ملاحظة: يمكن الإفادة من إنشاء خطٍّ موازٍ لآخر في تمثيل حاصلِ ضربِ عددَيْن، وناتج قسمة عددَيْن.

الإنشاء الهندسي لحاصل ضربِ العددَيْن: ٲ ، ب.

- أرسم المثلّث فيه س ص ع بحيث س ص = وحدة واحدة، س ع = ب وحدة.
- على امتداد الضلع $\overline{\text{س ص}}$ أرسمُ قطعةً مستقيمة، طولها ٲ وحدة، ولتكن $\overline{\text{س ل}}$.
- من النقطة ل أرسم مستقيماً موازياً للضلع ص ع، ويقطع امتداد الضلع س ع في النقطة هـ.
- طول القطعة المستقيمة $\overline{\text{س هـ}}$ يمثّلُ حاصل الضرب ٲ ب.

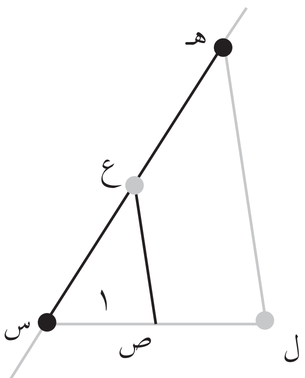
نشاط ٨

أوضّحُ: أنّ طول $\overline{\text{س هـ}}$ = ٲب

المثلّث س ص ع يشابه المثلث ....

$\frac{\text{س ع}}{\text{س ص}} = \frac{\text{س هـ}}{\text{س ل}}$ ....

س هـ = ٲب



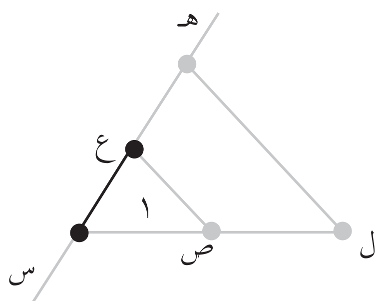
نشاط ٩

تمثيل ناتج قسمة عددَيْن هندسياًّ.

إذا كان س ل = ٲ وحدة ، س هـ = ب وحدة ،

س ص = وحدة واحدة.

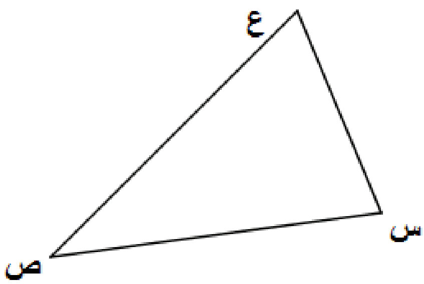
أبيّنُ أنّ: س ع = $\frac{\text{ب}}{\text{ٲ}}$



المثلّثان س ص ع ، س ل هـ ....

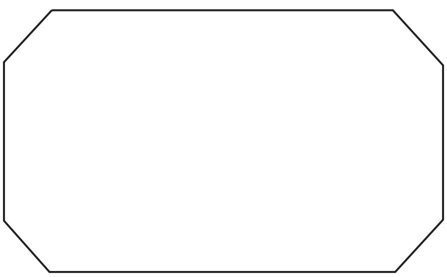
$\frac{\text{س هـ}}{\text{س ل}} = \frac{\dots}{\dots}$ ، س ع = ...

تمارين ومسائل:



(١) أرسم القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفيّ ضلعيْن في مثلث توازي الضلع الثالث، وطولها يساوي نصف طوله. أرسمُ القطعةَ الواصلة بين منتصفيّ ضلعيْن في المثلث س ص ع باستخدام الحافة المستقيمة، وأتحقّقُ من النظريّة بالقياس.

(٢) مُنصّفات زوايا المثلث تتلاقى في نقطةٍ واحدة، وهي مركز للدائرة المرسومة داخل المثلث. أرسمُ شكلاً هندسيّاً باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار يوضّحُ ذلك.



(٣) اشترى سالمٌ طاولةً لحديقته المنزليّة، يريد تثبيت مظلة في منتصفها ساعدْهُ في تحديد نقطة منتصف الطاولة لتثبيت المِظلّة.

(٤) في الشكل المجاور (أ ، ب يمثلان طولي قطعتين مستقيمتين)

استخدم الإنشاءات الهندسيّة في تمثيل:

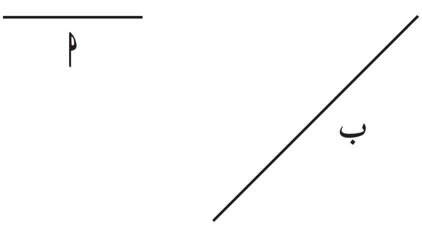
أ) أ + ب

ب) أ _ ب

جـ) ب _ أ

د) أب

هـ) $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$



(٥ - ٢) إنشاءات هندسيّة (٢)
Geometric Constructions (2)

نشاط ١

تجتمعُ العائلةُ الفلسطينيّةُ عادةً في المساءِ؛ للتحاور ومتابعة البرامج الثقافيّة التلفزيونية.
أراد أبو سعيدٍ شراءَ شاشةِ تلفازٍ؛ لوضعها في صالة الجلوس. اقترح سعيدٌ شراءَ شاشةٍ، مقاسُها ٤٢ بوصة، لكنّ والده قال: إنّ المقاس ٣٢ بوصةً هو الأنسب. شاركت الأم، واقترحت عليهم قياسَ المِساحة المتاحة لوضع الشاشة، ثمّ أخْذ القرار المناسب.
فإذا كانت أبعادُ الحائط المخصّص لوضع الشاشة هو ٢٥ ، ٤٠ بوصةً، وكان مقاس شاشة التلفاز هو طول قطرها (س) بالبوصة، ويُعطى بالعلاقة س = $\sqrt{٢م}$ حيث: م هي مِساحة الشاشة، فإنّ مقاس الشاشة الأنسب هو:

س= $\sqrt{٢ \times ٢٥ \times ٤٠}$

س= ....

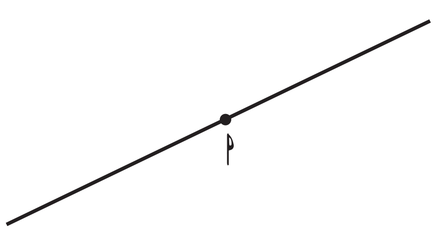
س= ٢٠ $\sqrt{٥}$

هل يمكن التعبير عن مقاس الشاشة بعددٍ صحيحٍ، أو عددٍ نسبيّ؟

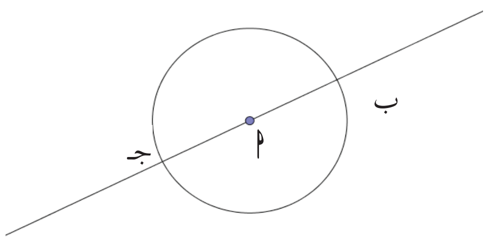
يُسمّى العدد $\sqrt{٥}$ ....، وينتمي إلى مجموعة الأعداد ....

نشاط ٢

إقامة عمود على قطعةٍ مستقيمةٍ من نقطة واقعة عليها.
أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبة، وأرسم دائرةً مركزها أ ، تقطع القطعة المستقيمة في النقطتيْن: جـ ، ب.
أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبةً، وأثبّتهُ عند النقطة جـ، وأرسم قوساً.



بالفتحة نفسها أُثبّتُ الفرجار عند النقطة ب، وأرسمُ قوساً يقطع القوس الأوّل في النقطة هـ.
أكملُ الرسمَ لأحصلَ على العمود ٢ هـ.



أتحقّقُ هندسيّاً من صحّة الرّسم.

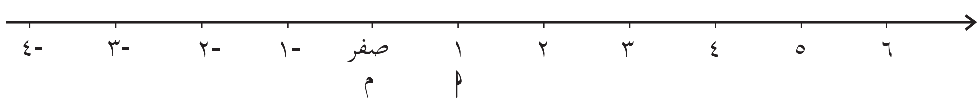
نشاط ٣

أرسمُ المثلّث ٢ ب جـ القائم الزاوية في ب .
أمدُّ القطعة المستقيمة من جهة ب، أُكملُ خطواتِ إقامةِ عمودٍ على قطعةٍ مستقيمةٍ من نقطةٍ واقعةٍ عليها.

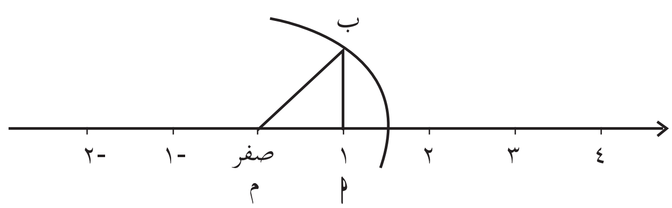
أتعلّم: تُستخدَمُ الإنشاءاتُ الهندسيّة لتمثيل الأعدادِ غيرِ النسبيّة التي على هيئة جذورٍ تربيعيّة، لأعدادٍ ليست مربعاتٍ كاملةً على خطّ الأعداد.

نشاط ٤

أمثّلُ √٢ على خطّ الأعداد:



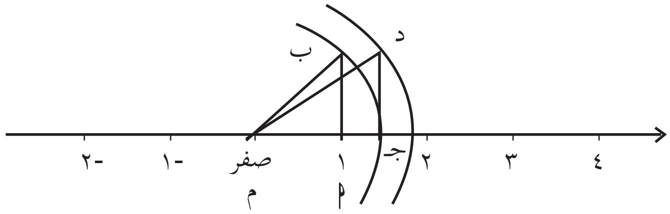
• أُنشىءُ عموداً طولُه وحدةً واحدة عند النّقطة ٢، وأُسمّيه ٢ ب، فيكون م ب يساوي √٢ . أرسمُ قوساً من دائرة مركزها م، ونصفُ قُطرِها م ب، ويقطعُ خطَّ الأعداد، أُعيّنُ عند √٢ .



نشاط ٥

أمثّل $\sqrt{٣}$ على خطّ الأعداد.

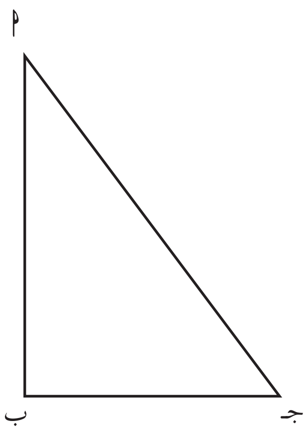
- بالرجوع إلى النشاط السابق ،أُنشيءُ عموداً على خطّ الأعداد عند $\sqrt{٢}$ ، طولُهُ وحدة واحدة، وأُسمّيه $\overline{\text{جـ د}}$.
- م د = ...



- أُكملُ الرسم لتمثيل العدد $\sqrt{٣}$.

نشاط ٦

في المثلّث أ ب جـ المجاور، أ ب = $\frac{\text{س} - ١}{٢}$ ، أ جـ = $\frac{\text{س} + ١}{٢}$ ، أجدُ طولَ الضلع $\overline{\text{ب جـ}}$.



باستخدام نظريّة فيثاغورس:

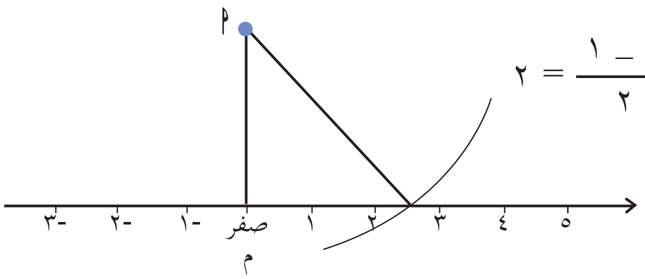
$(\text{ب جـ})^٢ = (\text{أ جـ})^٢ - (\text{أ ب})^٢$

$(\text{ب جـ})^٢ = \left(\frac{\text{س} + ١}{٢}\right)^٢ - \left(\frac{\text{س} - ١}{٢}\right)^٢$

وينتج أنّ: $(\text{ب جـ})^٢$ = ... = ...

أتعلّم: لتمثيل جذر العدد س، س $\geqslant$ ٠ على خطّ الأعداد، نقيم عموداً عند نقطة الصفر طولُهُ $\frac{\text{س} - ١}{٢}$، ونسمّيه $\overline{\text{أم}}$، ثمّ نرسمُ قوساً من دائرة مركزُها أ ، ونصف قطرها $\frac{\text{س} + ١}{٢}$، ويقطع خط الأعداد. نقطة تقاطعه مع خطّ الأعداد هي تمثيل العدد $\sqrt{\text{س}}$.

نشاط ٧



أُمثّل $\sqrt{5}$ بالطريقة السابقة:

طولُ العمود على محور السينات = $\frac{٥ - ١}{٢}$ = ٢

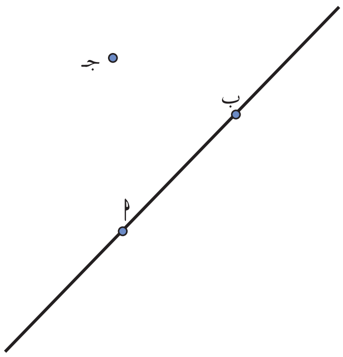
أرسمُ قوساً من دائرة مركزها ﻡ ،

ونصف قطرها ....

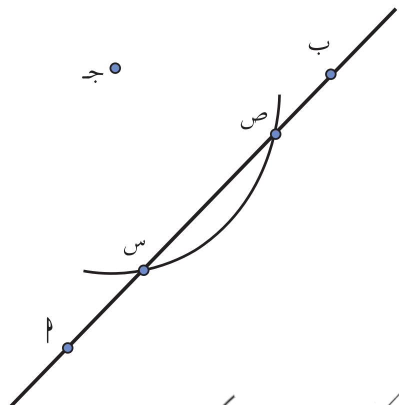
أُعيّنُ $\sqrt{5}$ على خطّ الأعداد.

نشاط ٨

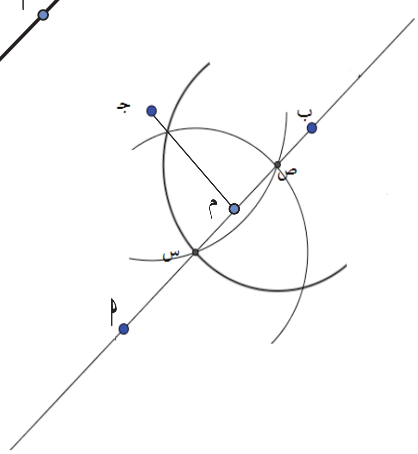
إنشاء عمودٍ على مستقيمٍ من نقطةٍ خارجةٍ عنه.



- أرسمُ المستقيمَ ﻡ ب، والنقطة جـ الخارجة عنه.



- أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبة، وأُثبّتُه في النقطة جـ، وأرسمُ قوساً يقطعُ المستقيم في النقطتين س ، ص.



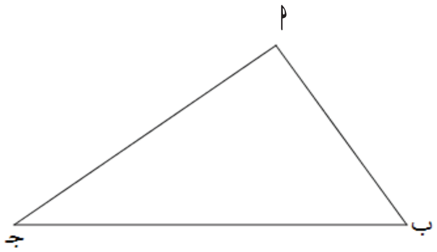
- أُنصّفُ القطعةَ المستقيمةَ $\overline{\text{س ص}}$ في النقطة م.

- أصلُ بين جـ ونقطة المنتصف م.

لتوضيح أنّ جـ م عموديٌّ على س ص هندسيّاً، أصلُ بين النقاط جـ، س، ص، الشكل الناتج هو مثلّث ....
جـ م عموديٌّ على س ص؛ لأنّ ....

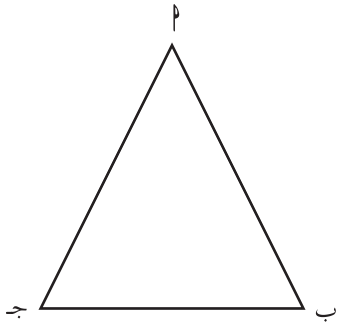
نشاط ٩

في الشكل المقابل أنشئُ عموداً للمثلث ا ب جـ، من الرأس ا على القاعدة ب جـ.

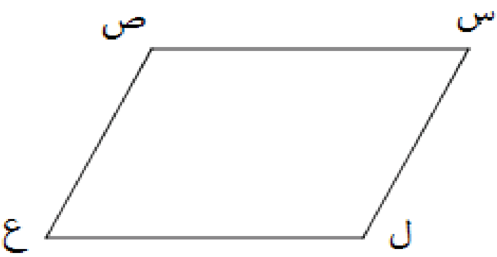


النقطة ا نقطةٌ خارجةٌ عن المستقيم ....
أُثبّتُ الفرجار في النقطة ا، وأرسم .... يقطع الضلع ب جـ في النقطتين ....
أُكملُ الرسم.

تمارين ومسائل:



(١) في المثلث متساوي الساقيْن، العمود المقام من منتصف القاعدة يمرُّ بالرأس، ويُنصّف زاويته. تحقّقْ من صحّة النظريّة؛ عن طريق الرسم بالحافة المستقيمة والفرجار.



(٢) أرسمُ ارتفاعاً لمتوازي الاضلاع من الرأس ص على القاعدة ع ل، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار.

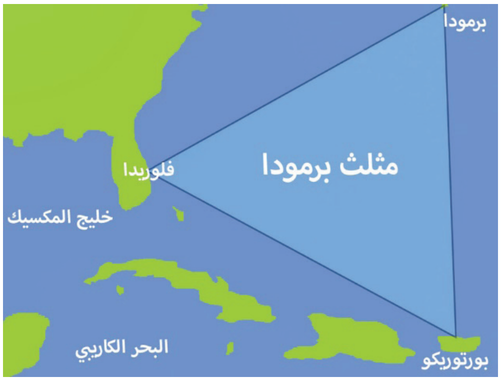
(٣) أنشئُ الزّوايا الآتية: ٤٥° ، $٢٢\frac{١}{٢}$°.

(٤) أُمثّلُ الأعداد الآتية على خطّ الأعداد:

$\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{١١}$ ، ١ $-\sqrt{٧}$

(٥) مصنعٌ للخزف يُنتج أطباقاً دائريّة الشكل، أراد سامي تقديم هديةٍ تذكاريّةٍ لصديقه؛ بحيث تكون ساعةً مثبتةً على طبقٍ خزفيّ. كيف يمكن مساعدتُه في تحديد موقعِ تثبيتِ عقاربِ السّاعة في الطبق باستخدام الإنشاءات الهندسية.

(٥ - ٣) المثلّث
Triangle



نشاط ١ مثلث برمودا هو منطقةٌ جغرافيّةٌ على شكل مثلث، مِساحته مليون كم^{2}، وهو منطقةٌ اشتهرت؛ بسبب مقالاتٍ وأبحاثٍ نُشِرت حول كثرة الحوادث، واختفاءات السفن وحتى الطائرات. لكنّ الإحصاءات الحديثة لخفر السواحل الأمريكيّة لا تشير إلى حالات اختفاءات السفن والطائرات أكثر من مناطقَ أخرى.

يقع مثلث برمودا في المحيط: ....

ويصل بين جزر ....، ودولة ....، وولاية ....

إذا كانت المسافة بين ولاية فلوريدا ومجموعة جزر برمودا تقدر بـ ١٥٠٠كم، أقدّرُ المسافة بين دولة بورتوريكو وولاية فلوريدا ....

وكذلك المسافة بين مجموعة جزر برمودا ودولة بورتوريكو ....

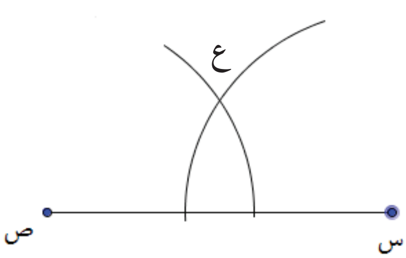
ما نوع مثلث برمودا من حيث الاضلاع ؟.......................................

يمكن تصنيف المثلثات من حيث الأضلاع إلى ....، و............، و ....

نشاط ٢ **رسم مثلث متساوي الساقيْن.**

أرسم مثلثاً متساوي الساقيْن، قاعدته $\overline{\text{س ص}}$ ؛ باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار:

- أفتحُ الفرجار فتحةً مناسبة.
- أُثبّتُ الفرجار عند النقطة س، وأرسم قوساً.



- بالفتحة نفسها أثبّتُ الفرجار عند النقطة ص، وأرسم قوساً آخر يقطع القوس الأوّل.
- نقطة تقاطُع القوسين ع هي الرأس الثالث للمثلّث، أعيّنها على الرسم، وأُكملُ الرسم باستخدام الحافة المستقيمة.
- ∢س = ∢ص

نشاط ٣

باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار، أُكمل الرسم لأحصلَ على مثلثٍ متساوي الساقين، قاعدته $\overline{\text{أ ب}}$.

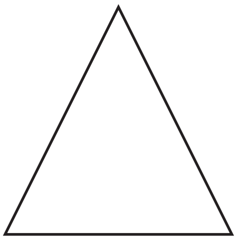
أ ________________ ب

أتذكر: العمود النازل من رأس المثلث متساوي الساقين على القاعدة يُسمّى محورَ التماثل للمثلث.

- أرسمُ محورَ التماثُل للمثلث.
- أفتحُ الفرجار فتحةً مختلفةً عن السابق، وأحاولُ رسمَ مثلثٍ متساوي الساقيْن مختلفاً.

كم مثلثاً متساوي الساقين يمكن رسمُه على القاعدة $\overline{\text{أ ب}}$ ؟ أوضّح العلاقة بين رؤوس هذه المثلثات.

نشاط ٤

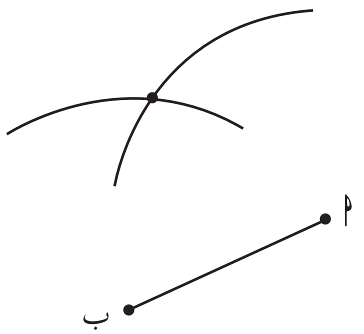


باستخدام الفرجار أحدّدُ نوع المثلث المرسوم ....

- في المثلث متساوي الأضلاع قياس كلِّ زاويةٍ فيه يساوي ....
- عدد محاور تماثله ....

نشاط ٥

رسم مثلث متساوي الأضلاع

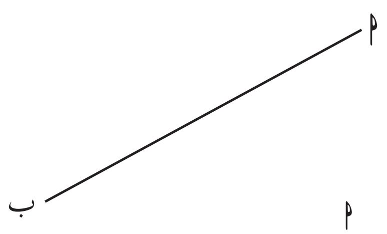


لرسمِ مثلثٍ متساوي الأضلاع قاعدته أ ب باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار:

- أفتحُ الفرجار فتحةً مساويةً لطول القطعة أ ب، وأثبّتُ الفرجار عند النقطة أ، وأرسم قوساً.

بالفتحة نفسها أُثبّت الفرجار عند النقطة ب، وأرسم قوساً آخر، يقطع القوس السابق.

- يكون الرأس الثالث للمثلث هو ....
- أُكمل الرسم.

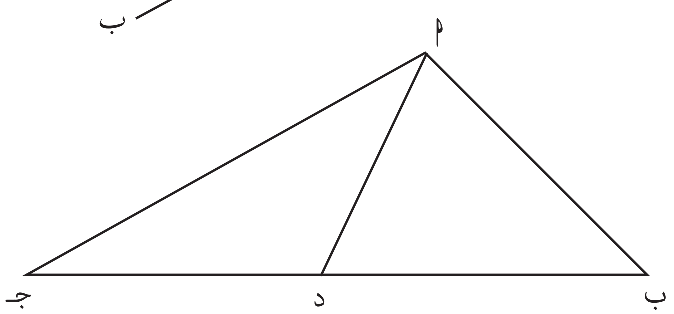


أفكر

كم مثلثاً متساوي الأضلاع يمكن رسمُه على القطعة أ ب ؟

نشاط ٦

القطعة المتوسطة في المثلث



أرسم المثلث أ ب جـ.

أنصف الضِّلْع ب جـ بالنُّقطة د ،

وأصل بين أ ، د ، فيكون ب د = ____

مِساحة المُثَلَّث = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × ________

مِساحة المُثَلَّث أ ب د = ______×_______×________

مِساحة المُثَلَّث أ جـ د = _______×______×________

ما العلاقة بين مِساحة المُثَلَّثين؟

أتعلم: القطعة المتوسّطة في المُثَلَّث هي القطعة المستقيمة الواصلة بين أحد رؤوس المُثَلَّث ومنتصف الضِّلْع المقابل له.

نشاط تعاونيّ: يوزّع المعلّم مجموعة من المُثَلَّثات المختلفة على مجموعات:

- نرسمُ القطع المتوسّطة في المُثَلَّثات.
- نلاحظُ أنّ القطع المتوسّطة في المُثَلَّث تقاطعت في ____________.
- نقيسُ المسافة من رأس المُثَلَّث إلى نقطة تقاطع القطع المتوسّطة.
- نقيسُ المسافة بين نقطة تقاطع القطع إلى منتصف الضِّلْع.

ماذا نلاحظ؟

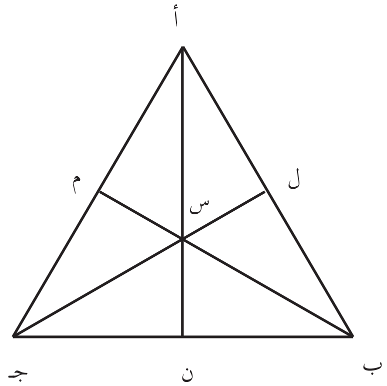
أتعلم: تتقاطع القطع المتوسّطة للمُثَلَّث في نقطة واحدة.
نقطة تقاطع القطع المتوسّطة، تُقَسِّمُ كلُّ قطعة منها بنسبة ٢ : ١ من جهة أي رأس.

نشاط ٧

في المُثَلَّث المجاور:

المُثَلَّث أ ب جـ ، فيه: ل منتصف أ ب، ن منتصف ب جـ، م منتصف أ جـ ،

س جـ = ٨ سم، س م = ٣ سم.



جـ س : ل س = ٢ : ١

ل س = ٤ سم .

ب س = ______ سم.

تمارين ومسائل:

(١) أُنشئُ الزّاوية ٦٠ ْ.

(٢) أُقسّم الزاوية المستقيمة إلى ثلاثة أقسامٍ متساوية.

(٣) أنشئُ معيّناً، أحدُ أقطاره القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$.

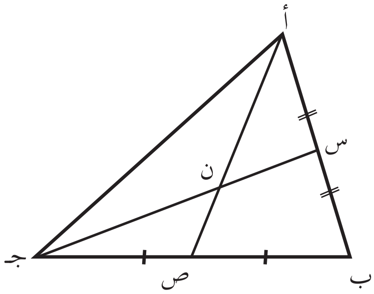
(٤) يعمل تامر في تصميم طائرات الأطفال، ساعدْه في إكمال الطائرة الورقيّة، التي أحد أقطارها القطعة المستقيمة المجاورة $\overline{\text{أ ب}}$.
هل يمكنه إنشاءُ طائراتٍ مختلفة على القُطر السابق نفسه؟ ساعدْه في ذلك.

(٥) يريد أبو محمّدٍ سقف ساحةٍ مستطيلةِ الشكل"بالقرميد"، أبعادها: ٦م ، ٤م ، كمرآبٍ لسيّارته، كما هو موضّحٌ في الشكل. ساعدْه في وضع التصميم المناسب في الشكل أدناه، موضّحاً شكل المثلثات وأبعادها. فسّر إجابتك.

(٦) أ ص ، جـ س قطع متوسّطة في المُثَلّث أ ب جـ، وطول $\overline{\text{ن ص}}$ = ٦ سم، أَجِدُ:

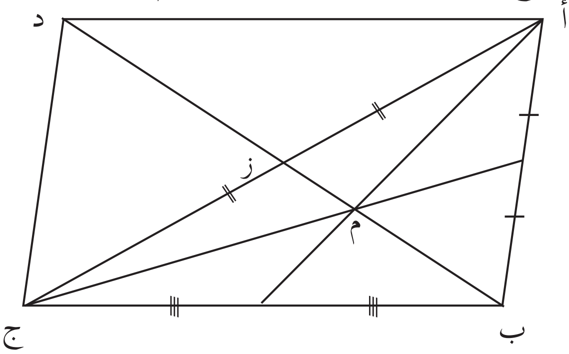
أ) طول $\overline{\text{أ ن}}$.

ب) طول $\overline{\text{أ ص}}$.



(٧) أب جـ د متوازي أضلاع، إذا كانت ز نقطة تقاطع القطرين، ب د = ٢٤ سم، م نقطة تلاقي القطع المتوسّطة للمُثَلّث أ ب جـ ،

أَجِدُ م ز .



(٨) **المثلّثُ الذهبيّ:** هو مثلّثٌ متساوي الساقين، فيه نسبةُ طولِ أحدِ الساقيْن إلى طول القاعدة يساوي النسبة الذهبية، وتساوي $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار أرسمُ رسماً تقريبيّاً لمثلثٍ ذهبيّ.

(٥ - ٤) رسم مضلّعاتٍ منتظَمة
Equileteral Polygons Construction

نشاط ١

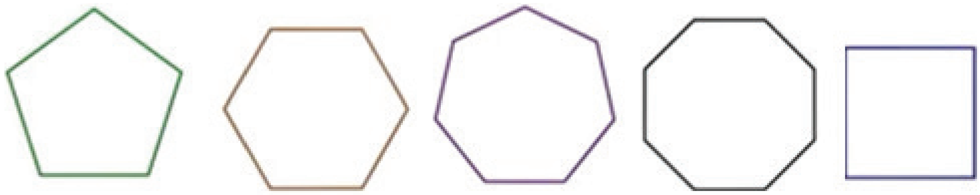
طبيعة فلسطين الخلّابة والمتنوعة يسمح لها بوجود ثرواتٍ طبيعيّةٍ كالعسل. وهذه الطبيعة تسمح بإنتاج النحل للعسل ثمانيةَ أشهرٍ في السنة، مقابلَ شهريْن في دولٍ أخرى؛ حيث يبلغ عدد خلايا النحل في فلسطين ٤٥ ألف خليّة، ومعدل إنتاجها ٤٥٠ طناً من العسل الصافي سنويّاً؛ ما يشكّل ثروةً وطنيّةً عظيمة. ولقرص العسل شكلٌ هندسيٌّ رائع؛ ما دعا بعض علماء الرياضيّات إلى تسميته "رائعةً معماريّةً".

الأشكال الهندسيّة التي تُكوّنُ خليّةَ النحل هي: ....

مجموع قياسات زوايا الشّكل ....، وقياس الزّاوية الداخليّة له ....

أتعلّم: السداسي المنتظَم هو المضلّع المنتظَم ذو أكبرِ عددٍ من الأضلاع، الذي يصلح لتغطية مِساحةٍ بالكامل. إضافة إلى أنّه المضلع الذي يعطي أكبرَ مِساحةٍ بأقصرِ محيط؛ ما يتيحُ للنّحلة بأنْ تُخزّنَ أكبرَ كميّةٍ من العسل بأقلّ كميّةٍ ممكنةٍ من المادة الشمعيّة.

نشاط ٢ أسمّي المضلّعات الآتية:



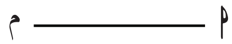
تُسمّى المضلّعاتُ في النشاط مضلّعاتٍ منتظَمةً؛ لأنّ ....

مجموع قياسات زوايا الخماسي المنتظَم هو ....، وقياس الزّاوية الداخليّة له ....

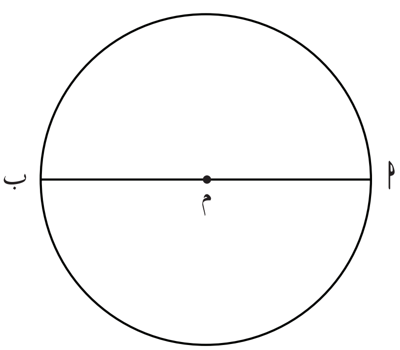
مجموع قياسات زوايا السباعي المنتظَم هو ....، وقياس الزّاوية الداخليّة له ....

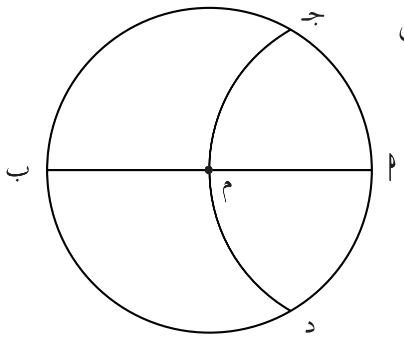
نشاط ٣ **أرسم شكلاً سداسياً منتظماً أحد أضلاعه أ م باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار.**

١. أرسم دائرة مركزها النقطة م ونصف قطرها أ م



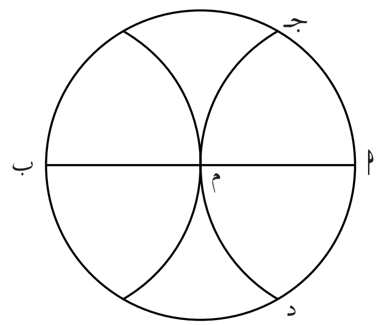
٢. أكمل رسم القطر أ ب





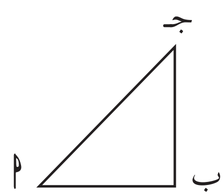
٣. بنفس الفتحة أرسم قوساً من دائرة مركزها النقطة ﻫ ويقطع الدائرة في النقطتين جـ ، د.

٤. أرسم قوساً آخر مركزه النقطة ب وأحدد نقاط تقاطعه مع الدائرة.



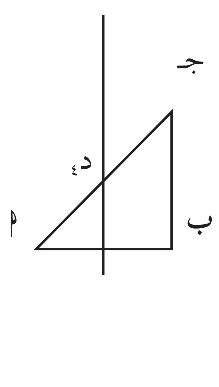
٥. أصل بين نقاط تقاطع القوسين مع الدائرة أو نهايتا قطر الدائرة.

مثال ١: رسم مضلع منتظم إذا عُلِم أحد أضلاعه

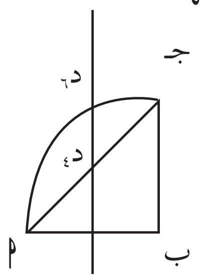


أرسم مضلعاً خماسيّاً منتظَماً، أحدُ أضلاعِه $\overline{\text{ﻫ ب}}$، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار.

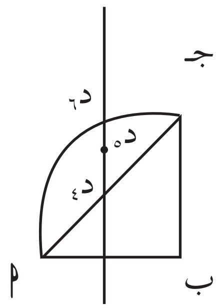
١. أرسم مثلثاً قائم الزاوية في ب ومتساوي الساقين.



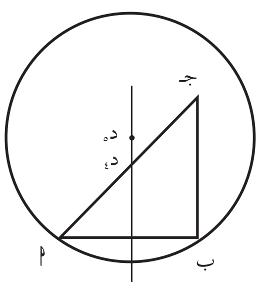
٢. أُنصّفُ الضلع $\overline{\text{ﻫ ب}}$ ، وأقيم عليه عموداً يقطع الضلع $\overline{\text{ﻫ جـ}}$ في النقطة د٤.



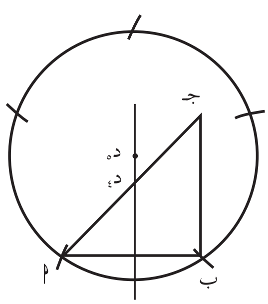
٣. أرسمُ قوساً من دائرة مركزها ب، ونصف قطرها يساوي أ ب ويقطع العمودي في النقطة $د_٦$.



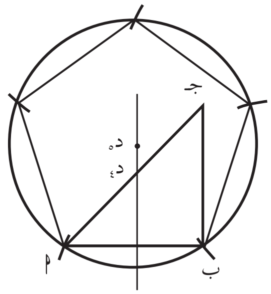
٤. أُنصّفُ القطعة، $\overline{د_٤ د_٦}$ في النقطة $د_٥$.



٥. أرسم دائرة مركزها النقطة $د_٥$، ونصف قطرها أ $د_٥$.



٦. أفتحُ الفرجار فتحةً تساوي أب، ومن النقطة أ أبدأ بتقسيم الدائرة بأقواس على التوالي تتقاطع مع الدائرة بنقاط تكون هي رؤوس الشكل الخماسي.

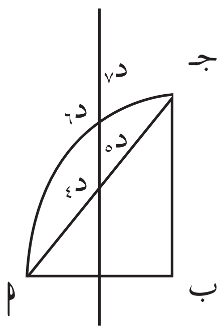


٧. أصلُ بين الرؤوس، وأحصل على الشكل الخماسي المنتظَم.

نشاط ٤

أرسمُ شكلاً سباعيّاً منتظَماً، أحد أضلاعه $\overline{\text{أ ب}}$:

لرسم الشكل السباعي أتّبعُ خطواتِ المثال السابق ١-٣.



- لتحديد مركز دائرة السباعي أفتح الفرجار فتحة تساوي د٥ د٦ وأركز في النقطة د٦ وأرسم قوساً يقطع العمودي في النقطة د٧
- أرسمُ دائرةً مركزها د٧ ، ونصف قطرها أ د٧ .

أُكملُ الرسم لتحديد رؤوس الشكل السباعي.

وبشكل عام: لرسم رباعيّاً منتظماً أرسم دائرة مركزها د٤ ونصف قطرها أ د٤ ، ولرسم سداسيّاً منتظماً أرسم دائرة مركزها د٦ ونصف قطرها أد٦ ، وهكذا.

تمارين ومسائل:

(١) أجدُ مجموع قياسات زوايا الأشكال الآتية، وقياس الزاوية الداخليّة لها:
أ) الثماني المنتظَم.   ب) السباعي المنتظَم.

(٢) أرسمُ باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار مربّعاً بطريقتيْن مختلفتيْن.

(٣) أرسم باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار سداسيّاً منتظماً. (بطريقة رسم المضلعات المنتظمة)

(٤) النجمة الخماسيّة: هي شكلٌ هندسيٌّ يتكوّنُ من خماسيّ منتظم ، مرسوم على كلِّ ضلعٍ من أضلاعه مثلثٌ ذهبيٌّ. أرسمُ نجمةً خماسيّةً باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار، وأجدُ زاويةَ رأسها.

(٥) أرضية غرفةٌ على هيئة مستطيلٍ، أبعادها: ٦م ، ٨م ، يُراد تبليطُها بأشكالٍ سداسيّةٍ منتظَمة، أُنشئُ سداسيّاً منتظماً بطول ضلعٍ مناسبٍ، وأملأُ به المِساحة.

روابط إلكترونية:
www.youtube.com/watch?v=p-YehXivY5c
www.youtube.com/watch?v=TAHczLeIUTc

(٥ - ٥) تكافؤ الأشكال الهندسيّة
Equivalence of Geometric Figures

نشاط ١

تقوم دائرةُ تسجيل الأراضي في فلسطين بتسجيل الأراضي بأسماء مالكيها. يمتلك الأخوان عبد الحميد وعبد الرحيم قطعة أرضٍ تقع على الشارع الرئيس، أرادا تسجيلها في الدائرة، فقاما بالخطوات الآتية:

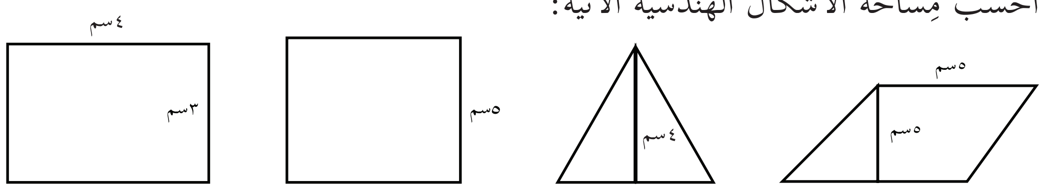
- إعداد مخطَّطِ المِساحة من قبل مكتبٍ مُعتمَد.
- استعانا بمهندسِ مِساحةٍ لتعيين الحدود على الأرض.

إذا مثّلَ الشكلُ المجاور مخطّطاً لقطعة الأرض، اقسم القطعةَ بين الأخوين بالتساوي. اشرحْ طريقتك ....

اقترحْ طرقاً أخرى للتقسيم.

نشاط ٢

أحسبُ مِساحةَ الأشكال الهندسيّة الآتية:



مستطيل　　مربع　　مثلث　　متوازي أضلاع

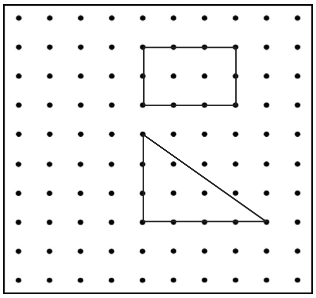
- مساحة المربع = ... سم^{2}، مساحة المستطيل = ... سم^{2}
- مساحة المثلث = ... سم^{2}، مساحة متوازي الأضلاع = ...
- مساحة متوازي الأضلاع = مساحة ....
- نقول: إنّ متوازي الأضلاع يكافيء المربّع
- مساحة المثلث = مساحة ....
- نقول: إنّ المثلث يكافيء ....

تعريف:

الشكلان الهندسيّان المتكافئان هما شكلان متساويان في المِساحة.

نشاط ٣

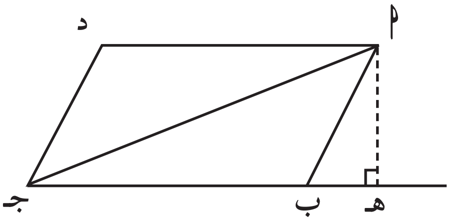
أرسمُ على اللوحة الهندسيّة أشكالاً هندسيّةً متكافئةً، مِساحةُ كلٍّ منها ٦ وحدة مربعة.



- مستطيل أبعاده: ٢ ، ٣ وحدة.
- مثلثٌ قائمُ الزّاوية، أطوال ضلعيّ القائمة: ...... ، ......
- ....
- ....
- ....

نشاط ٤

يمثّل الشكل المجاور متوازي الأضلاع ٲ ب جـ د، وُصِّلَ القطر $\overline{\text{ٲ جـ}}$ ، فنتج المثلثان



ٲ ب جـ ، ٲ جـ د فيهما:

ٲ ب = ... ، ب جـ = ...

قياس زاوية ٲ ب جـ = قياس زاوية ....

إذن: ينطبق المثلثان بـ ....

إذا كان ب جـ = ١٠ سم، ٲهـ = ٦سم

مِساحة المثلث ٲ ب جـ =..............، مِساحة المثلث ٲ جـ د =..............

المثلثان ٲ ب جـ ، ٲ جـ د متكافئان.

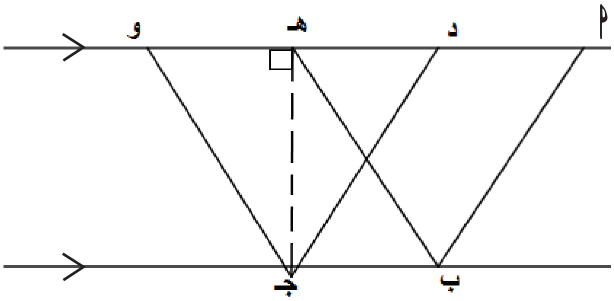
أستنتج: إذا تطابق شكلان هندسيّان فإنّهما متكافئان.

أفكر

هل تكافؤ الأشكال الهندسيّة يؤدّي إلى تطابقها؟

نشاط ٥

في الشكل المجاور ٲ ب جـ د ، هـ ب جـ و متوازيا أضلاع مشتركان في القاعدة ب جـ ، ومحصوران بين مستقيمين متوازييْن، ب جـ = ٤سم، هـ جـ = ٦ سم



مساحة متوازي الأضلاع هـ ب جـ و = القاعدة × الارتفاع

ارتفاع متوازي الأضلاع ٲ ب جـ د = ...

مِساحة متوازي الأضلاع ٲ ب جـ د = ... × ....

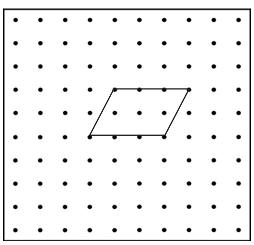
إذن: متوازي الأضلاع ٲ ب جـ د يكافئ متوازي الأضلاع هـ ب جـ و. لماذا؟

نظريّة:

متوازيا الأضلاع المشتركان في القاعدة، والمحصوران بين مستقيميْن متوازييْن يكونان متكافئيْن.

نشاط ٦

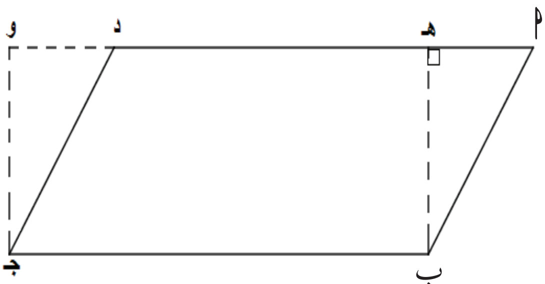
أرسمُ متوازي أضلاعٍ يكافئ متوازي الأضلاع المرسوم على اللوحة الهندسية.



كم متوازي أضلاعٍ يكافئ متوازي الأضلاع المرسوم، ويشترك معه في القاعدة، يمكن رسمه على اللوحة الهندسيّة؟

نشاط ٧

قطعةُ أرضٍ على شكل متوازي أضلاع، طوله ٣٠م، وارتفاعه ٢٠م، اتّفق صاحبُها على تعديل الحدود مع جيرانه؛ بحيث تصبحُ القطعةُ مستطيلةً وبالمساحة نفسها؛ وذلك باقتطاع مثلثٍ قائمِ الزّاوية من جهة، وإضافة مثلثٍ قائم الزاوية بالمساحة نفسها من الجهة الأخرى. أجد:



مِساحة قطعة الأرض قبل التعديل = ...×........ = ...

مِساحة قطعة الأرض بعد التعديل = الطول × العرض.

طول متوازي الأضلاع = طول المستطيل، لماذا؟ ....

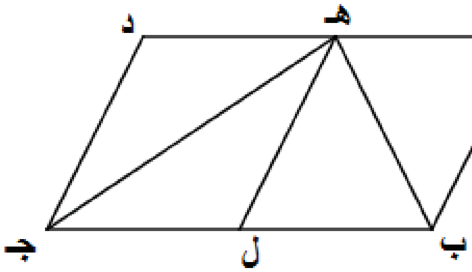
ارتفاع متوازي الأضلاع = عرض المستطيل، لماذا؟ ....

ٲ د // ب جـ لماذا؟ ماذا ألاحظ؟

نظريّة: متوازي الأضلاع يكافىء المستطيل المشترك معه في القاعدة والمحصورين بين مستقيمين متوازيين.

نشاط ٨

ما علاقة المثلث بمتوازي الأضلاع المشترك معه في القاعدة والمحصورين بين مستقيمين متوازيين؟



أرسمُ متوازي الأضلاع ٲ ب جـ د.

أرسم المثلث هـ ب جـ .

أرسم القطعة هـ ل توازي ٲ ب

إذن: هـ ل تـوازي د جـ ، لماذا؟ ....
....

ينطبق المثلثان ٲ ب هـ ، ل هـ ب ، فيهما:

ٲ ب = هـ ل، لماذا ؟ ....

ٲ هـ = ب ل ، هـ ب مشترك

مِساحة المثلث ٲ ب هـ = مِساحة المثلث......

كذلك ينطبق المثلثان هـ ل جـ ، جـ د هـ ، فيهما:

١) ....

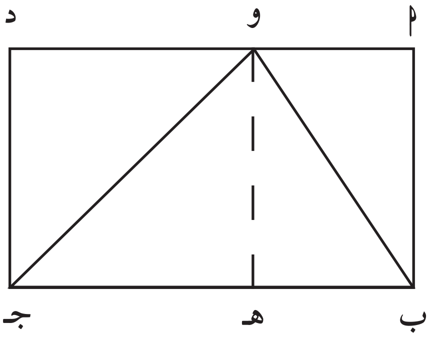
٢) ....

٣) ....

أستنتج: مِساحة المثلث = ... المشترك معه في القاعدة، والمحصورين بين مستقيمين متوازيين.

نظريّة:

مِساحة المثلث تساوي نصف مِساحة متوازي الأضلاع المشترك معه في القاعدة والمحصورين بين مستقيمين متوازيين.



نشاط ٩

في الشكل المجاور ﻫ ب جـ د مستطيل، فإذا كانت مساحة المثلث ﻫ ب و = ١٠سم٢، ومساحة المثلث و جـ د = ١٥سم٢، أجدُ مساحة المثلث و ب جـ:

أُقيم العمودُ $\overline{\text{و هـ}}$، المثلث ﻫ ب و يكافىء المثلث ....، لماذا ؟ ....

مِساحة المثلث و ب هـ = ...

مِساحة المثلث و هـ جـ = ... لماذا ؟ ....

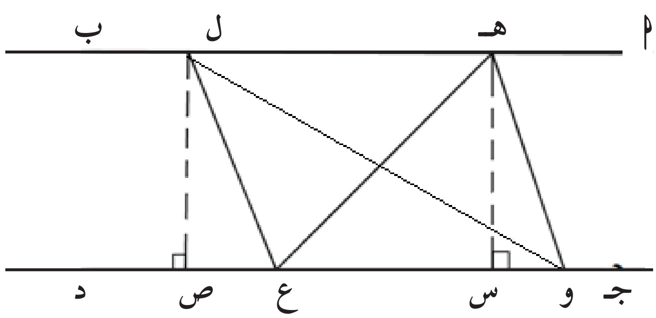
لكنّ المثلث و ب جـ يتكوّن من المثلثين: .... و ....

إذن: مساحته = ... + ... = ...

مِساحة المستطيل ﻫ ب جـ د تساوي ....

أفكر

هل يمكن إيجاد مساحة المستطيل في النشاط السابق بطريقةٍ أخرى؟



نشاط ١٠

يُمثّلُ الشكل المجاور شارعيْن متوازييْن، هـ و ع ، ل و ع قطعتيّ أرضٍ مثلثتي الشكل، متداخلتين ومشتركتين في القاعدة. أبيّنُ أنّ المثلثين هـ و ع ، ل و ع متكافئان.

مساحة القطعة هـ و ع = $\frac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع = ... × .....

مساحة القطعة ل و ع = ... × .....

لكنّ الارتفاع $\overline{\text{هـ س}}$ = الارتفاع $\overline{\text{ل ص}}$ لماذا ؟............

إذن: مساحة المثلث هـ و ع = مساحة المثلث ل د ع

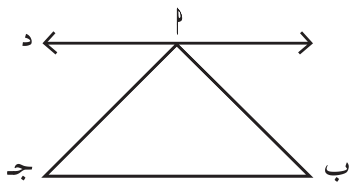
أستنتج:

المثلثان المحصوران بين مستقيمين متوازيين ولهما القاعدة نفسها متكافئان.

نشاط ١١

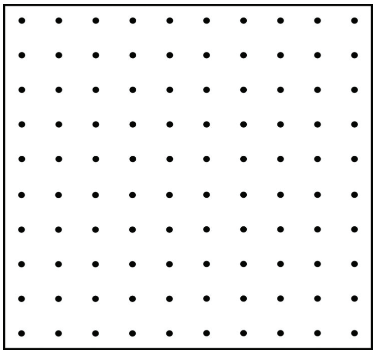
أرسم مثلثاً مشتركاً مع المثلث أ ب جـ في القاعدة في الشكل، ومكافئاً له علماً بأن $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ يوازي $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$:

أرسم مثلثات أخرى مكافئة للمثلث أ ب جـ.

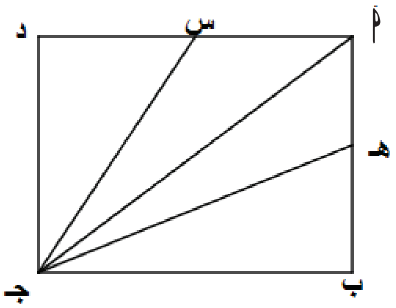


تمارين ومسائل:

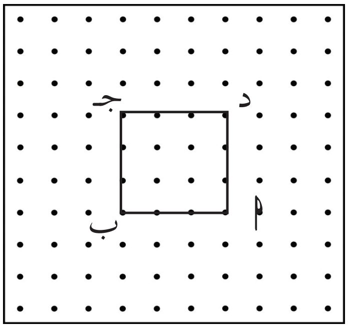
(١) أرسمُ ثلاثة أشكالٍ هندسيّةٍ متكافئةٍ، مِساحة كلٍّ منها ٤ وَحداتٍ مربّعة.



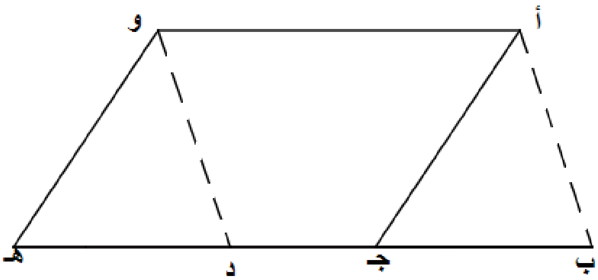
(٢) أ ب جـ د مستطيل، فيه النقطة هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$، والنقطة س منتصف $\overline{\text{أد}}$، أُسمّي ٣ أزواجٍ من المثلّثات المتكافئة.



(٣) أ ب جـ مثلث، مِساحته ٢٠سم^{2}، $\overline{\text{أ د}}$ قطعة متوسطة في المثلث، إذا أُنزِلَ عمودٌ من النقطة د على الضلع $\overline{\text{أ جـ}}$ طوله ٤ سم، أجدُ طول $\overline{\text{أ جـ}}$.



(٤) ارسم أشكالاً رباعيّةً مختلفة مكافئة للمربع أ ب جـ د، ومحصورة بين المستقيمين أ ب ، جـ د في الشكل.

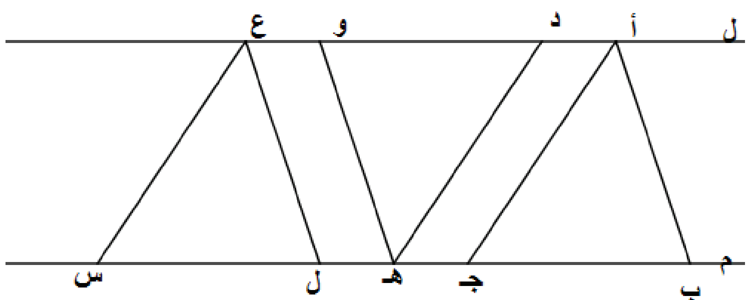


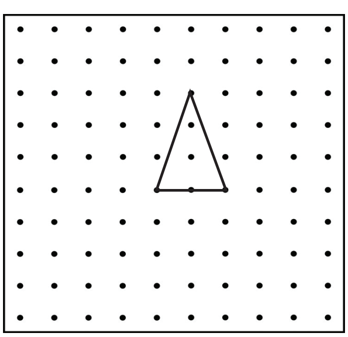
(٥) في الشكل المجاور أ ب // و د ، أ جـ // و هـ ، أ و // ب هـ . أبيّنُ أنّ:

أ) مساحة أ ب د و تساوي مساحة أ جـ هـ و.

ب) المثلث أ ب جـ يكافىء المثلث و د هـ.

(٦) ل ، م مستقيمان متوازيان، ب جـ = د و = ل س
أبيّنُ: أنّ المثلثَ أ ب جـ، والمثلث د هـ و، والمثلث ع ل س مثلثاتٌ متكافئةٌ.





(٧) أرسمُ خمسة أشكال هندسيّة مختلفة ومكافئة للمثلث المرسوم في الشكل.

(٨) أ ب جـ د شبه منحرف، فيه أ د يوازي ب جـ ، وُصِلَ قطراه أ جـ ، ب د فتقاطعا في النقطة م.
أُبيّنُ أنّ المثلث أ ب م يكافىء المثلث د م جـ.

(٩) أ ب جـ مثلث مساحته ٨ سم^{٢}، أُنشِيء على قاعدته ب جـ المربع س ب جـ د، بحيث تقع النقطة أ على س د . أجد:

أ) مساحة المربع س ب جـ د.

ب) طول ب جـ .

(٥ - ٦) تمارين عامّة

السؤال الأول:

أُمثّلُ على خطّ الأعداد:

$\sqrt{٢} + ١$ ، $\sqrt{٥} - ١$ ، $١ - \sqrt{٣}$ ، $٢\sqrt{٧}$

السؤال الثاني:

أرسم زوايا قياسها ٣٠° ، ١٥°.

السؤال الثالث:

أرسم المثلث أ ب جـ، القائم الزاوية في ب، ثم أُنشئُ القطعة المستقيمة $\overline{\text{ب د}}$ حيث: د هي منتصف الوتر. تحقّق أنّ طول $\overline{\text{ب د}}$ = نصف طول الوتر $\overline{\text{أ جـ}}$.

السؤال الرابع:

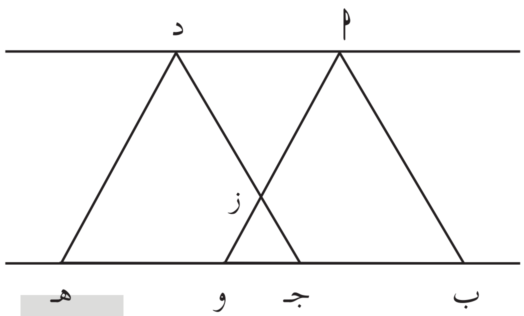
بقرتان ترعيان في حقلٍ مستطيل الشكل، أبعاده: ٢٠ م ، ١٢ م. إذا رُبِطَت البقرتان في زاويتين متقابلتين في الحقل بحبلٍ طوله ١٣ م ، أرسم باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار شكلاً تخطيطيّاً للحقل،موضّحاً المساحة التي ترعى فيهما كلتا البقرتين.

السؤال الخامس:

أ ب جـ د مربع محيطه ٢٤سم، هـ منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$. احسب مساحة المثلث أ هـ جـ.

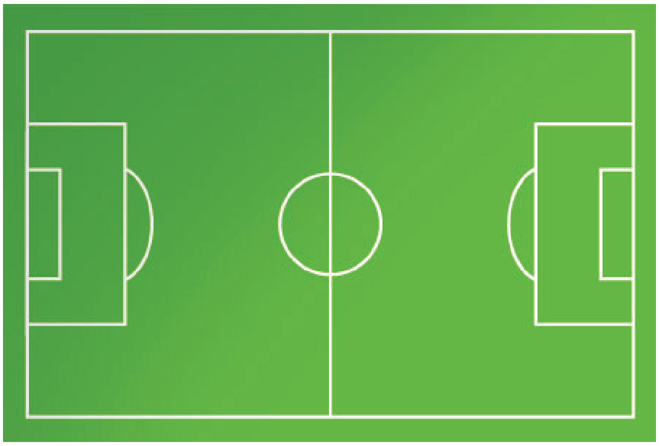
السؤال السادس:

أ ب جـ د ، أ و هـ د متوازيا أضلاعٍ مشتركان في القاعدة $\overline{\text{أ د}}$ ، ومحصوران بين مستقيمين متوازيين كما في الشكل المجاور. بيّنْ أنّ الشكل أ ب جـ ز يكافيء د ز و هـ.



فكرةٌ رياديّة:

- أرسم مخطّطاً تفصيليّاً لملعب كرة القدم، باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار.
- اقترح أبعاداً مناسبة للملعب للاستفادة من قطعة أرض أبعادها ١٥٠م ، ١٠٠م لتصميم ذلك الملعب.



الوحدة ٦ السادسة

الرياضيّات المالية
Mathematical Finance

هل تابعت يوماً النشرة الاقتصاديّة في الأخبار ...
ما مدى معرفتك بأسواق المال وما يجري فيها ؟

أصبح الاقتصاد يشكل عصب الحياة، والمعاملات التجارية صارت ضرورة لايمكن الاستغناء عنها.
من خلال دراسة هذه الوَحْدَة يصبح الطلبة قادرين على توظيف الرياضيات المالية في الحياة العملية من خلال تحقيق الأهداف الآتية:

١ - التعرف إلى مفهوم الأسهم.
٢ - التعرف إلى مفهوم السندات.
٣- التعرف إلى مفهوم التأمين وأنواعه المختلفة.

(٦ - ١) الأسهم (Shares)

نشاط ١

يعاني المواطنون الفلسطينيّون من نقصٍ في موادّ البناء؛ إذ يتمّ استيرادها من الخارج. فكّرت مجموعةٌ من المستثمرين بإنشاءِ شركةٍ مساهمةٍ؛ تمهيداً لإنشاء أولّ مصنعٍ فلسطينيّ متكاملٍ للأسمنت.

شركة مساهمة تعني.............................

إذا قرّر المستثمرون فتح الباب أمام الجمهور للمساهمة في الشركة عن طريق الأسهم، قيمة كلِّ سهم ديناران ، اشترى عادل ١٠٠٠سهم من أسهم هذه الشركة،

المبلغ الذي ساهم فيه =..............

أتعلّم: السّهم: عبارة عن صكٍّ يثبت أنّ لحامله حصةً في ملكيّة أصول شركةٍ مساهمةٍ معيّنة، إضافةً إلى حقّه في نسبةٍ من أرباحها.

القيمة الاسمية للسّهم: هي قيمة السهم عند الشراء، وهي القيمة التي تظهر في الدفاتر المحاسبيّة، وعلى شهادة السّهم.

ملاحظة: يُعتمد في حساب الأرباح في الأسهم الربح البسيط.

نشاط ٢

أودعَ محمودٌ مبلغ ٢٥٠٠ ديناراً في بنك بسعر فائدة سنوية ١,٥٪.
مقدار ربحه في نهاية السنة= ٢٥٠٠ × .... = ...
إذا أودع المبلغ لمدة ٥ سنوات فإنّ ربحَه=....... × نسبة الفائدة × المدة
= .... × .... × .... = ...

نشاط ٣

يبيّن الجدولُ الآتي شكل وحجم التداول لأسهمِ مجموعةٍ من الشركات الفلسطينيّة، على مدار شهر كانون ثاني من عام ٢٠١٧، أتأمّلُ الجدول:

بورصة فلسطين

تقرير التداول الدوري

للفترة من 2017/03/01 إلى 2017/03/30

إسم الشركة	رمز السهم	عملة التداول	تصنيف السوق	أدنى سعر تداول	أعلى سعر تداول	سعر الاغلاق	سعر الاغلاق السابق	نسبة التغير (%)	عدد العقود
شركة ابراج الوطنية	ABRAJ	دولار	2	1.15	1.20	1.15	1.17	(-1.71)	7
المؤسسة العربيــة للفنــادق	AHC	دينار	2	--	--	0.71	0.71	--	0
البنك الاسلامي العربي	AIB	دولار	1	1.83	1.98	1.85	1.81	2.21	124
المجموعة الأهلية للتأمين	AIG	دولار	2	0.13	0.13	0.13	0.14	(-7.14)	24
العربية لصناعة الدهانات	APC	دينار	2	--	--	5.18	5.18	--	0
الشركة العربية الفلسطينية للاستثمار (أبيك)	APIC	دولار	1	1.82	1.95	1.84	1.89	(-2.65)	323
العقارية التجارية للاستثمار المساهمة العامة	AQARIYA	دينار	2	0.70	0.73	0.71	0.72	(-1.39)	16
المستثمرون العرب	ARAB	دينار	2	--	--	0.77	0.77	--	0
المؤسسة العقارية العربية	ARE	دينار	2	--	--	0.30	0.30	--	0
دواجن فلسطين	AZIZA	دينار	2	2.66	2.80	2.66	2.80	(-5.00)	4
بيت جالا لصناعة الأدوية	BJP	دينار	2	--	--	2.40	2.40	--	0
بنك فلسطين	BOP	دولار	1	2.65	2.78	2.70	2.75	(-1.82)	444
بيرزيت للأدوية	BPC	دولار	1	4.85	5.09	5.09	4.93	3.25	23

أُكملُ العبارات الآتية:

سعر سهم البنك الإسلامي العربي لحظة الإغلاق= ----

أعلى سعر تداول لسهم شركة أبيك= -------

نسبة التغير في سعر التداول لسهم بنك فلسطين= ----- القيمة السالبة تشير إلى -----

لم يطرأ أيُّ تغيير يُذكر على أسعار أسهم شركة ----- و----- و----- و -----

نشاط ٣

يمتلك غسان ٢٠٠ سهم في شركة الحافلات الوطنيّة، قيمة السّهم الاسميّة ٤ دنانير. إذا وزعت الشركة الأرباح السنويّة بنسبة ١٠٪،

فإنّ: ربح غسان في السنة = عدد الاسهم × القيمة الاسمية للسهم × نسبة الارباح

= ...... × ...... × ١٠٪=.......

القيمة الحاليّة للسهم: هي قيمة السهم في السوق المالي لحظة التداول.

نشاط ٤

يملك جابر ٥٠٠ سهم في مصنعٍ للرخام، قيمة السهم الاسميّة دينار، وقيمته الحاليّة دينار ونصف.

القيمة الحاليّة لجميع الأسهم = القيمة الحالية للسهم × عدد الأسهم

= .... × ٥٠٠ = ...

إذا وزّع المصنع أرباحاً قيمتها ٨٪،

فإنّ مقدار ربح جابر = ... × .... × ٨٪ = ...

النسبة المئوية الفعليّة للربح في الأسهم = $\frac{\text{مقدار الربح}}{\text{القيمة المالية للأسهم}}$ × ١٠٠٪

النسبة المئوية الفعليّة لربح جابر = ...

تمارين ومسائل:

١) تمتلك بيسان ٥٠٠ سهم في أحد البنوك الفلسطينية، القيمة الاسمية للسهم دينار واحد، بينما القيمة الحالية للسهم في السوق ٢,٧٥ دينارًا، فإذا وزّع البنك ٢٠٪ أرباحًا في إحدى السنوات، أحسب:

أ) مقدار ربح بيسان.

ب) القيمة الحالية لأسهم بيسان.

جـ) النسبة المئوية الفعلية للربح.

٢) قامت إحدى شركات الأدوية الفلسطينية بطرح أسهم للاكتتاب العام، بسعر القيمة الاسمية دينار واحد، بالإضافة لعلاوة إصدار بقيمة ٤ دنانير للسهم الواحد، اكتتب أحمد ٨٠٠ سهم، أحسب:

١) قيمة السهم التي اكتتب بها أحمد.

٢) إذا قامت الشركة بتوزيع ٢٠٪ أرباحًا في نهاية إحدى السنوات، أحسب:

أ) مقدار الربح الذي حصل عليه أحمد.

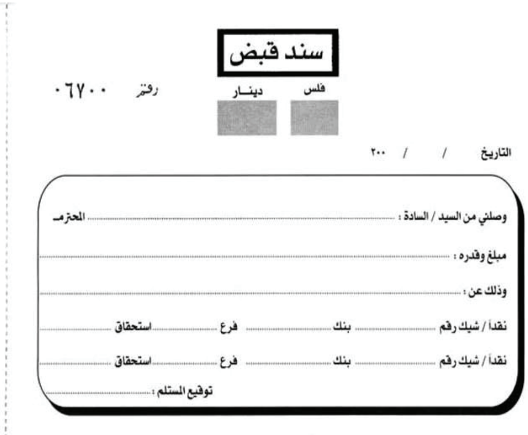
ب) النسبة المئوية الفعلية لهذا الربح، علماً بأن قيمة السهم الحالية ٥ دنانير.

٣) قررت إدارة مدرسة الجليل الثانوية أن تحول مقصف المدرسة إلى جمعية مساهمة عامة، فطرحت أسهم المقصف للشراء من قبل الطالبات بقيمة اسمية تعادل ١ دينار للسهم، فإذا اشترت جيهان ٢٠٠ سهم، ووزعت المدرسة في نهاية العام أرباحاً بنسبة ٢٠٠٪ ، أحسب ربح جيهان في نهاية العام الدراسيّ.

(٦ - ٢) السندات
(Bonds)

نشاط ١

تشجع وزارة الزراعة على الاستثمار في القطاع الزراعي، من خلال دعم وتسهيل إنشاء المشاريع الصغيرة.
اتفقت مجموعة من المزارعين في منطقة الأغوار على إنشاء مصنع تعليب في تلك المنطقة برأسمال قدره مليون دينار، قرر الشركاء فتح باب الاستثمار في المصنع عن طريق طرح السندات، إبراهيم يملك ٢٠٠٠ دينار يريد أن يستثمرها في المصنع بفائدة سنوية قدرها ٥٪.


سند قبض
فلس دينار
رقم ٠٦٧٠٠
التاريخ / / ٢٠٠
وصلني من السيد / السادة : .... المحترم
مبلغ وقدره : ....
وذلك عن : ....
نقداً / شيك رقم .... بنك .... فرع .... استحقاق ....
نقداً / شيك رقم .... بنك .... فرع .... استحقاق ....
توقيع المستلم : ....

ربح إبراهيم السنوي = ٥٪ × .... = ...
العائد الكلي في السنة ....

أتعلَّمُ: السندات هي أوراق مالية تصدرها الحكومات أو الشركات بقيمة معينة تثبت بأن مالكها دائن للجهة المصدرة للسند، وهو أحد أدوات الاستثمار المضمون التي توفر عائداً جيداً للمستثمرين، مقابل مخاطرة مقبولة، ويظهر على السند اسم الجهة المصدرة، ورقمه، ونوعه، وقيمته الاسمية، ومدته، وسعر الفائدة، وقد يصدر باسم المشتري أو لحامله.

- حامل السند ليس مالكًا في الشركة.
- العائد: قيمة السندات + الربح.

نشاط ٢

طرح صاحب مصنع فلسطين للألبان مجموعة من السندات للجمهور؛ من أجل زيادة رأسمال مصنعه، بفائدة قدرها ٦,٥٪ سنويا، قرر عامر الاستثمار في هذا المصنع بمبلغ ٨٠٠ دينار فاشترى ٨ سندات.
قيمة السند الواحد هي ....
ربح عامر السنوي ....
بعد مضي ١٠ سنوات يصبح العائد ....

نشاط ٣

تعريف:

- القيمـة الاسـمية للسـند : مقـدار المبلـغ الـذي يدفعـه المسـتثمر عنـد شـراء السـند مـن الشـركة, وهـو القيمـة المكتوبـة علـى السـند، والتـي تحسـب علـى أساسـها الفائـدة.
- القيمة التجارية للسند: المبلغ الذي يباع فيه السند في السوق المالي.
- تاريخ الاستحقاق: الوقت المحدد لسداد القيمة الاسمية للسند.

نشاط ٣

اشترى يوسف ١٠ سندات، القيمة الاسمية للسند الواحد ٥٠٠ دينار،
بفائدة مقدارها ٧,٥٪.
قيمـة الربـح الـذي يسـتحقه يوسـف فـي نهايـة السـنة = القيمـة الاسـمية × .... × نسـبة الفائـدة = ... × ١٠ × ...... = ٣٧٥ دينـار.
العائد بعد ٥ سنوات .... + ...

مقدار الربح السنوي للسندات = القيمة الاسمية للسند × عدد السندات × نسبة الفائدة
مقدار الربح الكلي للسندات = مقدار الربح السنوي × عدد السنوات (فترة الاستحقاق)

نشاط ٤

اشـترت هنـد ٧٠٠٠ سـند قرض، القيمـة الاسـمية للسـند الواحـد ٥ دنانيـر، والقيمـة التجاريـة ٩ دنانير، أحسب :
(أ) القيمـة الاسـمية للسـندات = عـدد السـندات × القيمـة الاسـمية للسـند الواحـد.
= .... × ...... = ٣٥٠٠٠ دينـار.
(ب) القيمة التجارية للسندات = عدد السندات × القيمة التجارية للسند الواحد.
= ٧٠٠٠ × ------ = ------- دينار.
(جـ) مقدار الربح عند بيع السندات = القيمة التجارية – القيمة الاسمية
= .... _ .... = ٢٨٠٠٠ دينار.

تمارين ومسائل:

(١) اشترى فايق ١٥٠ سندًا، بقيمة اسمية مقدارها ٢٠ دينارًا للسند الواحد، إذا كانت السندات تعطي ربحاً مقداره ٩٪، وفترة استهلاك السند ٦ سنوات، أحسب :

أ) الربح السنوي الذي يقبضه فايق.

ب) مجموع الأرباح التي يقبضها بعد انتهاء فترة استهلاك السند.

(٢) أيهما أفضل لسمر شراء ١٠٠ سند من بنك فلسطين، القيمة الاسمية للسند ٥ دنانير، ومقدار الفائدة ١٠٪ سنوياً، أم شراء ١٠٠ سند من البنك الوطني، القيمة الاسمية للسند الواحد ٤ دنانير، وبفائدة مقدارها ١٢٪، علما بأن سندات البنكين لها نفس تاريخ الاستحقاق ؟

(٣) استثمر موسى بمبلغ من المال في شركة التحرير للبلاط، فاشترى ٦٠ سندا، القيمة الاسمية للسند الواحد ٥٠ دينارا، بفائدة سنوية قدرها ٨٪ أجد :

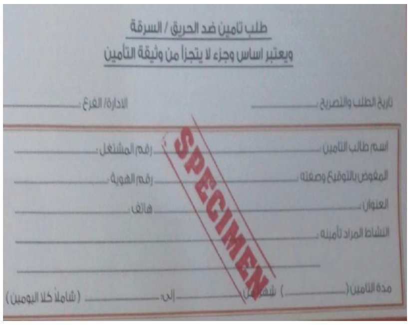
- مقدار المبلغ الذي استثمر فيه موسى.
- العائد بعد مضي ٥ سنوات.

(٤) اشترى سليمان ٣٠٠ سند، بفائدة سنوية ١٢٪ ، فكان ربحه في نهاية السنة ٣٦٠ دينارا، أجد القيمة الاسمية للسند الواحد.

(٦ - ٣) التأمين
(Insurance)

نشاط ١

تشترط وزارة النقل والمواصلات على أصحاب المركبات إحضار بوليصة تأمين.
هند تمتلك مركبة خاصة أمّنتها لدى شركة التأمين تأمينا شاملاً.


طلب تامين ضد الحريق / السرقة
ويعتبر اساس وجزء لا يتجزأ من وثيقة التأمين
تاريخ الطلب والتصريح ________ الادارة/ الفرع ________
اسم طالب التامين ________ رقم المشتغل ________
المفوض بالتوقيع وصفته ________ رقم الهوية ________
العنوان ________ هاتف ________
النشاط المراد تأمينه ________
مدة التامين (________) شهر من ________ إلى ________ (شاملاً كلا اليومين)

- أعدد أنواعًا أخرى لتأمين السيارات في فلسطين
....
- أتناقش مع زملائي حول أشكال أخرى للتأمين ....

أتعلَّمُ: عقد (بوليصة) التأمين: عقد بين شركة التأمين وشخص أو أشخاص يدفع بموجبه الشخص مبلغا من المال للشركة، على أن تعوضه عن جزء أو كل العقار أو البضاعة المؤمن عليها عند تعرضها للأخطار أو الخسائر.

نشاط ٢

تعمل منال في وزارة العمل الفلسطينية، قامت بالتأمين على سيارتها بمبلغ ١٠٠٠٠ دينار لدى شركة الوطن للتأمين، على أن تدفع قسطاً سنوياً مقداره ٢٠٠ دينار، ونصّ عقد التأمين الموقع بين الطرفين على أن تقوم الشركة بالتعويض عن أيّ ضرر يلحق بهذه السيارة بعد خصم ٥٪ من المبلغ المؤمن به استهلاكاً سنوياً، فإذا احترقت السيارة بعد مضي ٤ سنوات من توقيع العقد، أحسب:

أ) مقدار ما دفعته منال للشركة في ٤ سنوات.
المبلغ المدفوع = ... × .... = ٨٠٠ دينار.

ب) مقدار الاستهلاك من قيمة السيارة في ٤ سنوات.
مقدار الاستهلاك = ١٠٠٠٠ × .... × ٤ = ...

جـ) مقدار ما تدفعه الشركة لمنال كتعويض مقابل الضرر = مبلغ التأمين – الخصم = ١٠٠٠٠ – ....

د) ربح أو خسارة الشركة في هذا التأمين = مقدار ما تدفعه الشركة – ما دفعته منال = ...

نشاط ٣

قامت إحدى شركات الأدوية باستيراد معدات لتصنيع الدواء بقيمة ١٠٠٠٠٠ دينار، على أن تدفع لشركة التأمين ٥٪ من هذا المبلغ كتأمين على هذه المعدات، أحسب:

قيمة ما دفعته الشركة المستوردة لشركة التأمين ١٠٠٠٠٠ × .... = ...ديناراً.

إذا تلف من المعدات ما قيمته ١٥٠٠ دينار، فإن مقدار ربح أو خسارة شركة التأمين

.... − ١٥٠٠ = ...

هل ربحت شركة التأمين أم خسرت؟

نشاط ٤

أمّن إلياس على حياته لدى شركة تأمين على الحياة، ونصّ العقد المبرم بين الطرفين على أن تقوم الشركة بدفع مبلغ ٨٠٠٠٠ دينار في حال وفاته، على أن يدفع قسطاً شهرياً مقداره ٤٠٠ دينار، ولمدة ٢٠ سنة.

مقدار ما يدفعه الرجل خلال عشرين سنة = ... × ١٢ × .... = ٩٦٠٠٠ دينار.

إذا توفي إلياس بعد ٢٠ سنة من توقيع عقد التأمين فإن ربح الشركة =

.... − ٨٠٠٠٠ = ... دينار.

إذا توفي إلياس بعد ١٠ سنوات فيكون ما دفعه .... × .... × ١٠ = ...

خسارة شركة التأمين = ٨٠٠٠٠ − ...... = ... دينار.

تمارين ومسائل:

(١) يملك جمال سيارة ثمنها ١٢٠٠٠ دينار، أمّن عليها لدى الشركة الفلسطينية للتأمين بقسط تأمين سنوي، مقداره ٤ ٪ ولمدة ١٢ سنة، وبعد مرور ١٠ سنوات تعرضت السيارة لحادث وقدرت الأضرار بنسبة ١٠ ٪ من ثمنها، أحسب مقدار ربح أو خسارة شركة التأمين.

(٢) أمين تاجر موادّ غذائية، أمّن لدى شركة تأمين على كمية من السكر بقيمة ٥٠٠٠ دينار، وأخرى من الأرز بقيمة ١٢٠٠٠ دينار، برسم تأمين مقداره ٥٪ ، فإذا تلف أثناء النقل خمس كمية السكر، وربع كمية الأرز، أحسب مقدار ربح أو خسارة شركة التأمين.

(٣) أمنت ماريا على حياتها لدى شركة ضمان للتأمين بمبلغ ٢٤٠٠٠ دينار، بقسط سنوي مقداره ١٠٪ من قيمة التأمين، ولمدة ١٨ سنة، على أن تدفع القسط السنوي على أقساط شهرية متساوية، فإذا توفيت ماريا بعد مرور ١٥ عاماً. أجد:

أ) مقدار القسط السنوي.

ب) مقدار القسط الشهري.

جـ) مقدار خسارة أو ربح الشركة.

(٦ - ٤) تمارين عامّة

السّؤال الأول: أضَعُ دائرةً حولَ رمزِ الإجابةِ الصّحيحةِ:

١) يملك فريدٌ ٣٠٠٠ سهمٍ في شركةِ موادَّ تموينيةٍ، قيمة السهم الاسمية دينارٌ ونصفٌ، إذا وزّعت الشركةُ ١٠٪ أرباحا على المساهمين في إحدى السّنوات، أحسب أرباح فريدٍ في تلك السنة.

أ) ٣٠٠ ب) ٤٥٠ جـ) ٣٤٥٠ د) ٤٥٠٠

٢) الاستثمار الذي يحصل فيه المستثمرُ على فائدةٍ ثابتة سنويا بصرف النظر عن ربحِ الشركة أو خسارتها:

أ) في الشركات الخاصة ب) في الشركات الحكومية جـ) في الأسهم د) في السندات

٣) أمّن رجل على حياته، حيث يدفع قسطا شهريا، قدره ١٠٠ دينارٍ، مجموع ما يدفعه في ١٥ سنةً يساوي:

أ) ١٨٠ ب) ١٥٠٠ جـ) ١٨٠٠٠ د) ١٨١٠٠

السّؤال الثّاني: ....

اشترى أحمدُ ٢٠٠٠ سهمٍ من شركة صامد للموارد الإنشائية، بقيمة اسمية مقدارها ٤ دنانير للسّهم، فإذا كانت الأرباح المستحقة له في نهاية سنتين بحساب الربح البسيط ٨٨٠ دينارا. أجدُ معدل الفائدة السّنوي الذي حددته الشركة.

السّؤال الثّالث: ....

اشترى سمير ٢٠٠٠ سندٍ من البنك العقاري، بقيمة اسمية مقدارها ٣ دنانير، وبفائدة معيّنة لمدة أربع سنوات، فإذا حصل على عائد مالي كلي مقداره ٧٩٢٠ دينارًا، أحسب معدل الفائدة التي حددها البنك.

السّؤال الرّابع: ....

أمّن رجل على سيارته التي ثمنها ٣٠ ألف دينار تأمينا شاملا، حيث يدفع مبلغ ٤٠٠ دينار قسطا سنويا على أن تدفع شركة التأمين ٨٠٪ من ثمن السيارة إذا تعرضت للتلف، إذا تعرضت السيارة بعد ١٠ سنواتٍ لحادث سير أصبحت بعده غيرَ صالحةٍ للاستعمال، أحسبُ:

أ) المبلغ الذي ستدفعه شركة التأمين.

ب) مقدار ربح شركة التأمين أو خسارتها.

فكرةٌ رياديّة:

بالتنسيق مع المدير ومعلمي الرياضيات في مدرستك:

- حدد مشروعاً استثمارياً يلائم مدرستك (مدته فصل دراسيّ).
- تعاون مع زملائك لتأسيس شركة مساهمة محدودة لتمويل هذا المشروع.
- طبّق المشروع بإشراف المعلمين.
- وزّع الربح أو الخسارة على المساهمين.
- قُمْ بإعداد تقرير شامل عن المشروع مبيناً المعيقات التي واجهتك أثناء التنفيذ.

لجنة المناهج الوزارية

د. صبري صيدم | **د. بصري صالح** | **م. فواز مجاهد**
أ. ثروت زيد | **أ. عزام ابو بكر** | **أ. علي مناصرة**
د. شهناز الفار | **د. سمية النخالة** | **م. جهاد دريدي**

اللجنة الوطنية لوثيقة الرياضيات:

أ. ثروت زيد
د. محمد صالح (منسقًا)
د. معين جبر
د. علي عبد المحسن
د. تحسين المغربي
د. عادل فوارعة
أ. وهيب جبر
د. عبد الكريم ناجي
د. عطا أبوهاني
د.سعيد عساف
د. محمد مطر
د. علا الخليلي
د. شهناز الفار
د. علي نصار
د. أيمن الأشقر
أ. ارواح كرم
أ. حنان أبو سكران
أ. كوثر عطية
د. وجيه ضاهر
أ. فتحي أبو عودة
أ. عبد الكريم صالح
أ. أحلام صلاح
أ. نادية جبر
أ. نشأت قاسم
أ. نسرين دويكات
د. سمية النخالة
أ. احمد سياعرة
أ. قيس شبانة
أ. مبارك مبارك

المشاركون في ورشات عمل الجزء الثاني من كتاب الرياضيات للصف العاشر

أ. إياد دويكات
أ. آنية رضوان
أ. دعاء شتية
أ. مها غانم
أ. هيا رواشدة
أ. رفيق الصيفي
أ. صلاح الترك
أ. خالد العلامي
أ. سهيل شبير
أ. باسم المدهون
أ. وفاء موسى
أ. ابتسام اسليم
أ. عارف السعافين
أ. شذى جبران
أ. ريم العويصات
أ. عهود طه
أ. خلود كايد
أ. رأفت عامر
أ. معزوز ضبابات